短講

布の変形を記述してみよう！

星　貴之

平成 19 年 4 月 24 日

1.　はじめに

一般に, 布 (織物) は材料の特性や網目構造などの要因によって複雑な挙動を示す. それらの要因を無視し, 伸びないたて糸とよこ糸としてモデル化すると, 布の基本的な変形を記述することができる [1]. これは, 数学の分野でチェビシェフネット (Tchebychev, Chebyshev, Tchebyshef, or inextensible net) と呼ばれる微分幾何の問題である [2].

本稿では, まずチェビシェフネットの基礎的な理解に必要となる微分幾何の道具を揃え, そして球を包む例題について説明する.

2.　曲面の記述法 [3]

2·1　接ベクトル

本稿では, 次のようにパラメータ表示された曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を考える (Fig.1).

$$\boldsymbol{p}(u,v) \equiv \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} \tag{1}$$

この曲面上のある点 (u_0, v_0) における u 方向, v 方向の接ベクトルはそれぞれ次のように与えられる.

$$\boldsymbol{p}_u(u_0,v_0), \quad \boldsymbol{p}_v(u_0,v_0) \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{p}_u \equiv \partial\boldsymbol{p}/\partial u$, $\boldsymbol{p}_v \equiv \partial\boldsymbol{p}/\partial v$ である. $\boldsymbol{p}$ が曲面を定義するための必要十分条件は, ふたつの接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ が一次独立となることである.

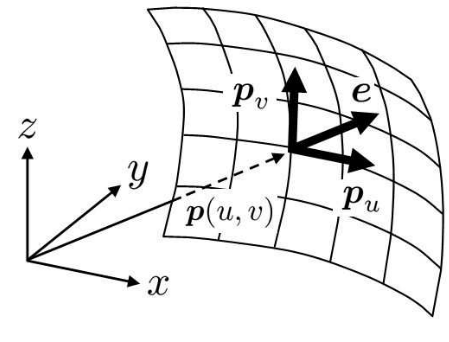

Fig.1 パラメータ表示された曲面.

2·2　第一基本形式

平面上の曲線 $\boldsymbol{p}(s) = \boldsymbol{p}(u(s), v(s))$ $(\alpha \le s \le \beta)$ を考える. s 方向の接ベクトル $\boldsymbol{p}_s$ は次のように表される.

$$\boldsymbol{p}_s = \boldsymbol{p}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{p}_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \tag{3}$$

よって曲線の長さは次のように書かれる.

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{E\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 2F\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} + G\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

ここで $E \equiv \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u$, $F \equiv \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v$, $G \equiv \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v$ である. 式 (4) から形式的に

$$\mathrm{I} \equiv E\mathrm{d}u\mathrm{d}u + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v\mathrm{d}v \tag{5}$$

という量を考え, これを “曲面の第一基本形式” と呼ぶ. 式 (3) から $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{p}_v\mathrm{d}v$ と書けば, 次のように表せて覚えやすい.

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} \tag{6}$$

2·3　第二基本形式

接ベクトル $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ に直交する法線ベクトル $\boldsymbol{e}$ (Fig.1) を次のように定義する.

$$\boldsymbol{e} \equiv \frac{\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u \times \boldsymbol{p}_v|} \tag{7}$$

関数 $f(u,v) \equiv \boldsymbol{e}(u_0,v_0) \cdot \boldsymbol{p}(u,v)$ を考える. f は $\boldsymbol{e}$ 方向に対する $\boldsymbol{p}$ の高さを表し, 点 (u_0, v_0) で極値をとる. その点における Hesse 行列式

$$\det H_f = \det\begin{bmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{bmatrix} \equiv \det\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \tag{8}$$

が正であれば極値, 負であれば鞍点であることがわかる. $\det H_f = 0$ のときは一般には何も言えない. ここで “曲面の第二基本形式” を次のように定義する.

$$\mathrm{II} \equiv L\mathrm{d}u\mathrm{d}u + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v\mathrm{d}v \tag{9}$$

これは H_f の二次形式であり, 正値ならば曲面 $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{e}$ 方向に凹, 負値ならば凸である. 不定ならば鞍点である. また $\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = 0$ などから

$$L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_u \tag{10}$$

$$M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{e}_v \tag{11}$$

$$N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{e}_v \tag{12}$$

となることがわかるので, II は次のようにも表せる.

$$\mathrm{II} = -\mathrm{d}\boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{e} \tag{13}$$

2·4 ガウス曲率

曲面上の曲線 $\boldsymbol{p}(s)$ を考える．簡単のため $|\boldsymbol{p}_s| = 1$ となるように s が決められているとする．$\boldsymbol{p}_{ss}$ の $\boldsymbol{e}$ と平行な成分を法曲率ベクトル $\boldsymbol{k}_n$, 垂直な成分を測地的曲率ベクトル $\boldsymbol{k}_g$ と呼ぶ ($\boldsymbol{p}_{ss} = \boldsymbol{k}_n + \boldsymbol{k}_g$). また $\boldsymbol{k}_n$ の大きさ κ_n を法曲率と呼ぶ. 法曲率は $\boldsymbol{p}_s$ の方向によって値が異なり, そのうち最大と最小のもの (主曲率) を κ_1, κ_2 とする．このときガウス曲率 K は次のように定義される．（導出は省略)

$$K \equiv \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{14}$$

これは第一基本形式と第二基本形式で定義された値であるが, 第一基本形式の係数のみで次のように書かれることがガウス本人によって示されている (ガウスの驚異の定理). ここで $H^2 \equiv EG - F^2$ である．

$$\begin{aligned} K = &\frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right) \\ &+ \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

3. 球を布で包む [1]

3·1 布の定式化

たて糸とよこ糸で編まれた布 $\boldsymbol{p}$ を考える．よこ糸に沿った方向を u, たて糸に沿った方向を v とする．伸びない糸を仮定し, $|\boldsymbol{p}_u| = |\boldsymbol{p}_v| = 1$ とする．$\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ のなす角を θ ($0 < \theta < \pi$) とすると, 第一基本形式の係数は次のようになる．

$$E = 1, \quad F = \cos\theta, \quad G = 1 \tag{16}$$

よって, 式 (15) よりガウス曲率 K は次のようになる．

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u}\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial u}\right) \\ &= \frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} \end{aligned} \tag{17}$$

3·2 いよいよ包む！

前述の布でしわがよることなく球を覆えたとすると, 布上での各点における曲率は球と一致する．したがって式 (17) から次の微分方程式が成り立つ．ここで R は球の半径である．

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + \frac{\sin\theta}{R^2} = 0 \tag{18}$$

いま $t \equiv \frac{uv}{R^2}$ とおいて無次元化すると次のようになる．

$$t\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sin\theta \tag{19}$$

例えば Fig.2 のようにフロシキでスイカを包むと, 下側ではしわが寄ることもなくピッタリと球面に沿った状態になる．その不思議さは, 昭和 22 年に森口繁一氏によって初めて指摘されている [1]. この場合の境界条件は, 布の中心 $t = 0$ で $\theta = \pi/2$, $\theta_t = -1$ となる．このとき式 (19) の解は近似的に次のように書ける．

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} - t + \frac{t^3}{18} \tag{20}$$

これは布の中心から離れるにしたがって θ が減少 (すなわち単位格子の面積 $\sin\theta$ が減少) するような変形をしつつ, 布が球面に沿っていくことを表している．現実の布は, 糸の太さや編み方などの影響でとりうる θ に下限が存在する．θ がその下限を超えて小さくなると, しわが現れることになる．

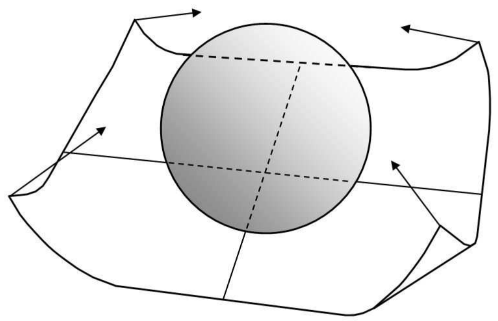

Fig.2 フロシキでスイカを包む.

4. おわりに

チェビシェフネットは, 古いテーマであることもあってか, ネット上で見つけられる文献が少ない．大域的にチェビシェフネットが存在するための条件 [4] (ガウス曲率の積分の絶対値が 2π を超えると解なし, はよく知られた事実らしい) などの数学的な論文はいくつかあったが, 抽象的で図もないので相当の力量が必要とされる．一方, 文献 [1], [2] は入門的なことをやさしく説明していて, 初心者がかじるにはちょうどいいと思う．文献 [1] は, 曲面を包む他にしわや縫製など衣服全般のことについて読み物的に述べている．また文献 [2] は, 布上の座標と球面上の座標を直接対応付ける微分方程式を導出している．

参考文献

[1] 篠原 昭: 衣服の幾何学, 光生館, 1997.

[2] A. C. Pipkin: Equilibrium of Tchebychev Nets, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 85, p.81-97, 1984.

[3] 小林 昭七: 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版), 裳華房, 1995.

[4] S. L. Samelson: Global Tchebychev nets on complete two-dimensional Riemannian surfaces, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 114, p.237-254, 1991.