解析信号の取扱説明書

星　貴之

平成 21 年 11 月 2 日

1.　はじめに

振動や波動を考えるとき, しばしば解析信号が使われる．それは便利ではあるが, 全ての整合性が取れているわけではない．過信して不用意に使うのはやや危険である．本稿では, 解析信号の扱い方をまとめる．

2.　解析信号

振幅 A, 角周波数 ω, 初期位相 ϕ の振動 $x(t)$ は一般に次のように表される．なお, 本稿では cos, sin をそれぞれ c, s と略記する．

$$x(t) = A\,\mathrm{c}(\omega t + \phi) \tag{1}$$

しかし電子回路や波動場を解析するとき, 三角関数のままでは計算が煩雑である．そこで便利な表現として導入されるのが, 次の解析信号 $z(t)$ である．複素数表示, フェーザー表示などとも呼ばれる．j は虚数単位．

$$z(t) = A\{\mathrm{c}(\omega t + \phi) + \mathrm{j}\mathrm{s}(\omega t + \phi)\} \equiv A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)} \tag{2}$$

ここで A は実数とする．複素振幅の場合にも, 絶対値と位相に分ければ同じ表示が可能である．実部が, 実際に観測される信号 (実信号) を表す．指数関数なので

- 時間項 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ をくくり出すことができる．
- 位相を θ 進めることは, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ を掛けることと等価．
- 微分は $\mathrm{j}\omega$, 積分は $1/\mathrm{j}\omega$ を掛けることと等価．

などの性質が利用でき, 計算が簡単になる．例えば波動方程式を代数方程式に変換して解いたり, コンデンサのインピーダンスを $1/\mathrm{j}\omega C$ と表すことができる．

ところで, あくまで $z(t)$ は「$x(t)$ の便利な表現法」であって, 等価ではない．$x(t)$ は次のように書き換えることができ, 正と負の周波数成分を持つ．

$$x(t) = \frac{A}{2}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t + \phi)}\right\} \tag{3}$$

逆向きに回転する解析信号の虚部同士が打ち消し合い, 実部だけが残るのである．一方, $z(t)$ は正の周波数成分しか持たない．等価でないため, 数式中の $x(t)$ を $z(t)$ に置き換えるだけでは結果が異なる場合がある．次章では, 振動に関するそれぞれの演算について調べる．

3.　実信号と解析信号の比較

3·1　重ね合わせ

足し算の場合には, そのまま**置き換えてよい**．

【実信号】

$$x_1(t) + x_2(t) = A_1\,\mathrm{c}(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\,\mathrm{c}(\omega_2 t + \phi_2) \tag{4}$$

【解析信号】

$$\begin{aligned} z_1(t) + z_2(t) &= A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t + \phi_1)} + A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t + \phi_2)} \\ &= A_1\,\mathrm{c}(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\,\mathrm{c}(\omega_2 t + \phi_2) \qquad (5) \\ &\quad + \mathrm{j}\{A_1\,\mathrm{s}(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\,\mathrm{s}(\omega_2 t + \phi_2)\} \end{aligned}$$

3·2　振幅変調

掛け算の場合には, そのまま**置き換えてはいけない**．

【実信号】

$$\begin{aligned} x_1(t)\,x_2(t) &= A_1\,\mathrm{c}\omega_1 t\,A_2\,\mathrm{c}\omega_2 t \\ &= \frac{A_1 A_2}{2}\{\mathrm{c}(\omega_1 + \omega_2)t + \mathrm{c}(\omega_1 - \omega_2)t\} \end{aligned} \tag{6}$$

【解析信号】

$$\begin{aligned} z_1(t)\,z_2(t) &= A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}\,A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_2 t} \\ &= A_1 A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 + \omega_2)t} \\ &= A_1 A_2\{\mathrm{c}(\omega_1 + \omega_2)t + \mathrm{j}\mathrm{s}(\omega_1 + \omega_2)t\} \end{aligned} \tag{7}$$

正しくは以下のように計算すべきである．ここで * は複素共役を表す．

$$x_1(t)\,x_2(t) = \frac{1}{2}\{z_1(t)\,z_2(t) + z_1(t)\,z_2^*(t)\} \tag{8}$$

3·3　パワー

パワー (単位時間あたりのエネルギー) を求める場合にも, そのまま**置き換えてはいけない**．例えば電力では電圧と電流, 音響インテンシティ (単位面積あたりの音響パワー) では音圧と粒子速度の “掛け算” が行われるからである．ここで $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ とする．また $T \equiv 2\pi/\omega$ は周期を表す．

【実信号】

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,x_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_0^T A_1\,\mathrm{c}(\omega t + \phi_1)\,A_2\,\mathrm{c}(\omega t + \phi_2)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \frac{A_1 A_2}{2}\,\mathrm{c}(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \tag{9}$$

【解析信号】

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T z_1(t)\,z_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_0^T A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi_1)}\,A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi_2)}\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

正しくは以下のように複素パワーの実部をとるべきである．時間積分も暗に実行されていることに注意．

$$\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)\,x_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{z_1(t)\,z_2^*(t)\} \tag{11}$$

よく聞く「実効値 $A_1/\sqrt{2}$, $A_2/\sqrt{2}$ を掛けたものがパワー！」は位相差が無い場合を表す．電力ではそれを皮相電力 (単位: VA) と呼ぶ．また $\mathrm{c}(\phi_1 - \phi_2)$ を力率, 皮相電力 $\times$ 力率を有効電力 (単位: W) と呼ぶ．