フーリエ変換の世界観

星　貴之

平成 22 年 7 月 26 日

1.　はじめに

フーリエ変換の定義を覚えても, それが結局何なのかわからないままでは使いこなすことはできない。本稿ではフーリエ変換の意味を解説する. また例題としてディジタル計測をフーリエ変換の視点から見てみる.

2.　予備知識 — 二次元ベクトル

任意の二次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ は, 正規直交基底 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を用いて次のように展開することができる.

$$\boldsymbol{v} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y \tag{1}$$

係数 a_x, a_y は次のように $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ の内積によって与えられる.

$$\begin{cases} a_x = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x \\ a_y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_y \end{cases} \tag{2}$$

3.　フーリエ変換の意味

工学で扱う大概の関数 $f(t)$ は, 正規直交基底 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ を用いて次のように展開することができる.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

係数 $F(\omega)$ は次のように $f(t)$ と $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ の内積によって与えられる.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \tag{4}$$

前節と対応付けて説明した. つまり, フーリエ変換 $F(\omega)$ は "関数 $f(t)$ に含まれているある周波数 ω の振動成分の複素振幅" を表している. また関数は無限次元ベクトルであるため, 振動成分の重み付きの無限和 (フーリエ逆変換) で表現される. 複素振幅が振幅と位相という 2 つの情報を同時に表すことに注意. (オシロスコープの FFT 機能は絶対値 $|F(\omega)|$ のみを表示する.) なお, 複素関数 f, g の内積 $\langle f, g \rangle$ は次のように定義される. ここで * は複素共役を表す.

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)^* \mathrm{d}t \tag{5}$$

フーリエ変換の行きと帰りで e の肩の正負が異なっているのは, この複素共役のためである.

フーリエ変換を "時間領域から周波数領域への変換操作" と覚えてもよいが, 上述の解釈のほうがより直観的にイメージできると思う.

4.　覚えておくべき性質

実際に計算することなくイメージでフーリエ変換を使って思考するためには, 以下のことを覚えておく必要がある. 他に時間シフトや積分, 微分のフーリエ変換などもおさえておくとなおよい. ここで $\mathcal{F}$ は $f(t)$ のフーリエ変換を表す. $\mathcal{F}\{f(t)\} \equiv F(\omega)$, $\mathcal{F}\{g(t)\} \equiv G(\omega)$.

4·1　線型性

足してからフーリエ変換しても, フーリエ変換してから足しても, 結果は同じ. この性質のおかげで, 複雑な関数を簡単な関数にバラして考えることができる.

$$\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\} = F(\omega) + G(\omega) \tag{6}$$

4·2　軸の伸縮

時間領域で幅を $1/a$ 倍にすると, 周波数領域では幅が a 倍になる. 連動して変化する感覚が大切.

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{7}$$

4·3　実信号

$f(t)$ が実信号のとき, 実部は線対称, 虚部は点対称.

$$F(\omega) = F(-\omega)^* \quad \text{when} \quad f(t) \in \mathcal{R} \tag{8}$$

さらに $F(\omega)$ の実部 (cos との内積) が $f(t)$ の偶関数成分, 虚部 (sin との内積) が奇関数成分に対応することから, 実偶関数のフーリエ変換もまた実偶関数となることがわかる.

4·4　積と畳み込み

積のフーリエ変換は, フーリエ変換の畳み込み. 逆に畳み込みのフーリエ変換は, フーリエ変換の積.

$$\mathcal{F}\{f(t)\, g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\, F(\omega) * G(\omega) \tag{9}$$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(\omega)\, G(\omega) \tag{10}$$

なお, 畳み込みは次式で定義される.

$$F(\omega) * G(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')\, G(\omega - \omega') \mathrm{d}\omega' \tag{11}$$

これは「G を反転して」「周波数軸上を動かしながら」「F とかけて」「全て足し込む」演算である. g が実関数のとき $G(\omega) = G(-\omega)^*$ なので, 振幅に着目する場合には「反転」を省いてもよい.

4·5　デルタ関数

ある周波数 ω_0 で値を持つデルタ関数 $\delta(\omega - \omega_0)$ と $F(\omega)$ を畳み込むと, $F(\omega)$ がそこに移動する.

$$F(\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = F(\omega - \omega_0) \tag{12}$$

5. ディジタル計測

近年の計測において, 得られた物理量はほぼ必ず電気信号に変換され, そしてコンピュータに取り込まれる. そこでは A/D 変換 (標本化, 量子化, および符号化) が行われる. 前節で述べた性質を用いて, 標本化の段階で何が起こるのかを考えてみる.

5·1 有限観測時間

フーリエ変換は $-\infty < t < \infty$ における積分として定義されているが, 無限時間観測し続けることは現実的には不可能である. そのため, 信号 $f(t)$ には観測時間 T の矩形関数 $\mathrm{rect}(t/T)$ がかかることになる. ここで $\mathrm{rect}(t)$ は次のように定義される関数.

$$\mathrm{rect}(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{when } |t| \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{13}$$

また時間領域で矩形関数がかけられたことにより, 周波数領域ではそのフーリエ変換 $T\,\mathrm{sinc}(T\omega/2)$ が畳み込まれる. ここで $\mathrm{sinc}(\omega)$ は次のように定義される関数.

$$\mathrm{sinc}(\omega) \equiv \frac{\sin(\omega)}{\omega} \tag{14}$$

5·2 標本化（サンプリング）

標本化は, サンプリング周期 ΔT ごとにデータを記録する作業である. これは櫛型関数 (デルタ関数列) $\delta_{\Delta T}(t)$ をかけることとして表される. ここで $\delta_T(t)$ は次のように定義される関数.

$$\delta_T(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{15}$$

また時間領域で櫛型関数がかけられたことにより, 周波数領域ではそのフーリエ変換 $\frac{2\pi}{\Delta T}\,\delta_{\frac{2\pi}{\Delta T}}(\omega)$ との畳み込みとなる.

5·3 図的に考える

数式だけではイメージが湧かないので, 各関数をグラフで描いてみる. 元信号 $f(t)$ を実関数とし, 簡単のため周波数領域では実部のみを図示する (Fig.1).

元信号のスペクトルは, sinc 関数によってぼやけ, デルタ関数列によって複製される. このことから, 元信号に近いスペクトルを得るためには観測時間 T が長い方がよいこと, 複製同士が重なる現象 (エイリアシング) を防ぐためにはサンプリング周期 ΔT が短い方がよいことがわかる. 理論的には, 元信号の帯域がサンプリング周波数の半分 (ナイキスト周波数) 以下であれば複製同士が重ならず, 元信号を正しく復元できる (サンプリング定理). また元信号の帯域が広い, または不明なときには, 適切な LPF (アンチエイリアスフィルタ) によって帯域制限した後に A/D 変換を行う.

ところで, 標本化した結果がデルタ関数列という “積分しないと意味を持たない” 関数になることに筆者はやや違和感を覚える. 実際には標本化が瞬時には行われず有限の時間がかかること (究極的には「不確定性原理」?) と関係して何らかの関数が畳み込まれる気がするが, そのことを述べている人, 本, ウェブサイトに出会ったことはない. あくまで便宜上の記法なのか, それとも物理世界と整合性がとれているのか, 興味深い.

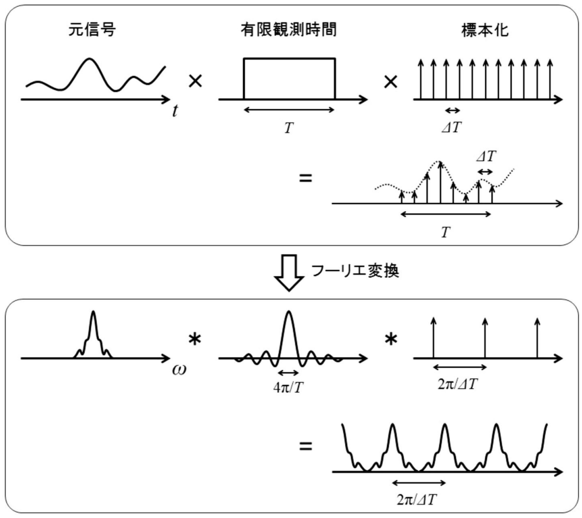

Fig.1 標本化のイメージ.

6. おわりに

フーリエ変換をイメージでとらえると, 例えば矩形波を矩形関数とデルタ関数列の畳み込みとみなすことでスペクトルのイメージをとらえられるようになる. 定義に従って計算するだけでなく, このような考え方にも是非なじんでいただきたい.

A フーリエ級数展開からの導出

フーリエ級数展開からフーリエ変換を導出すると両者の関係がわかるので, ここでその手順を示す. まず周期 $T\ (= 1/f_0)$ の周期関数 $g(t)$ をフーリエ級数展開する.

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(2\pi f_0 n t) + b_n \sin(2\pi f_0 n t)\} \tag{16}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \tag{17}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \tag{18}$$

ここで $c_n \equiv (a_n - \mathrm{j} b_n)/2$ とおき, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} \equiv \cos x + \mathrm{j} \sin x$ を用いて式変形すると, 複素フーリエ級数展開が導かれる. $n \in [0, \infty]$ であった n を式変形の中で $n \in [-\infty, \infty]$ に拡張するのがミソである.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 n t} \tag{19}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f_0 n t} \mathrm{d}t \tag{20}$$

そして $T \to \infty$ の極限をとることで非周期関数に対するフーリエ変換が導かれる. このとき同時に $f_0 \to \mathrm{d}f$, $f_0 n \to f$, $\sum \to \int$, $c_n T \to G(f)$ と書き換える.

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}f \tag{21}$$

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t \tag{22}$$

以上で導出されたフーリエ変換は周波数 f に関するものである．角周波数 $\omega \equiv 2\pi f$ に変数変換すると，$\mathrm{d}\omega = 2\pi\,\mathrm{d}f$ の関係からフーリエ逆変換の係数 $1/2\pi$ が現れる．“フーリエ逆変換には 2π で割る定義と割らない定義がある” と覚えた人がいるかもしれないが，変数のとり方が違うだけで結局同じものなのである．

B　積と畳み込みの関係の導出

時間領域での積を式変形することで周波数領域での畳み込みとの関係を導く．途中で $\omega = u + v$ という変数変換を行う．

$$\begin{aligned}
f(t)\,g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}ut}\mathrm{d}u\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}vt}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,G(\omega-u)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)*G(\omega)\} \\
\therefore\quad & \mathcal{F}\{f(t)\,g(t)\} = \frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega) \qquad (23)
\end{aligned}$$

周波数領域での積を式変形することで時間領域での畳み込みとの関係を導く．途中で $t = p + q$ という変数変換を行う．

$$\begin{aligned}
F(\omega)\,G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega p}\mathrm{d}p\int_{-\infty}^{\infty} g(q)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega q}\mathrm{d}q \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\,g(t-p)\mathrm{d}p\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{F}\{f(t)*g(t)\} \qquad (24)
\end{aligned}$$