

レンズとフーリエ変換

星 貴之

平成 23 年 11 月 11 日

1. はじめに

光学レンズはフーリエ変換作用を持つ [1]. フーリエ変換といえば, 微分方程式を解いたり, システムや物理現象を周波数空間で考察したり, 道具として利用されることが多い. 一方, 物理現象そのものがフーリエ変換によって記述されるという点で, このレンズの作用は興味深い.

本稿では波動の回折からフーリエ変換が導出される過程を解説し, 鍵となる要因を明らかにする.

2. フラウンホーファー回折

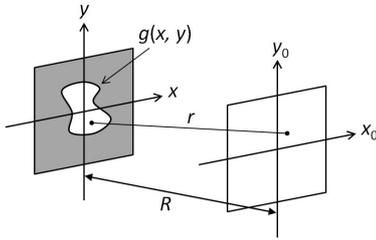


Fig.1 開口とスクリーンの座標系.

平行光が開口を通過する場合を考える (Fig.1). 開口から距離 R [m] の位置にあるスクリーン上の光の振幅分布 u は, 開口における各点の素元波の干渉として次式で与えられる (キルヒホッフの回折理論).

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint g(x, y) \frac{A \exp(ikr)}{r} dx dy \quad (1)$$

肉眼やセンサでは光の強度 $I (= |u|^2)$ が観測される. ここで $1/i\lambda$ は波動方程式とグリーンの定理から導かれる係数. $A \exp(ikr)/r$ は振幅 A , 波数 k [rad/m] の素元波. $r \equiv \sqrt{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ [m] は点 (x, y) から点 (x_0, y_0) までの距離. $g(x, y)$ は開口を表す関数.

$$g(x, y) \equiv \begin{cases} 1 & (\text{開口の内側}) \\ 0 & (\text{開口の外側}) \end{cases} \quad (2)$$

開口のサイズと比較してスクリーンまでの距離 R が十分大きい場合を考える. このとき, 素元波の $1/r$ を次式のように近似する (近軸近似).

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{R} \quad (3)$$

一方, 素元波の指数関数内の r には k という大きな値 (10^6 程度) がかけられるため, 単純に $r \simeq R$ とはできない. そこで次式のように近似する (付録 A 参照).

$$r \simeq R + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2R} - \frac{xx_0 + yy_0}{R} \quad (4)$$

式 (3), (4) を式 (1) に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= A' \iint g(x, y) \exp\{-i(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy \\ &= A' G(\nu_x, \nu_y) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで A' , ν_x , ν_y は次のように定義されている.

$$A' \equiv \frac{A}{i\lambda R} \exp\left\{ ik \left(R + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2R} \right) \right\} \quad (6)$$

$$\nu_x \equiv \frac{k}{R} x_0, \quad \nu_y \equiv \frac{k}{R} y_0 \quad (7)$$

すなわち振幅分布 u は, 開口 g のフーリエ変換 G に係数 A' をかけたものである. 例えば, 開口が円形ときには $J_1(w)/w$ (J_1 は第一種一次ベッセル関数, w は半径) が, 矩形のときには sinc 関数が現れる. また式 (7) の変数変換から振幅分布のサイズはスクリーンまでの距離 R に比例することも読み取れる.

以上の議論において, 開口の他は何もない様な空間であった. つまり, 開口を通過した光が空間を伝搬していくこと自体がフーリエ変換作用を持つ.

3. レンズのフーリエ変換作用

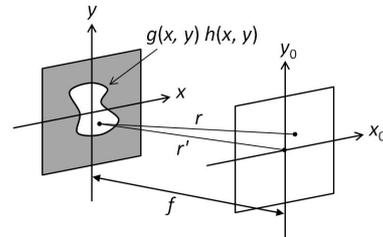


Fig.2 レンズとスクリーンの座標系.

平行光がレンズを通過する場合を考える (Fig.2). レンズのサイズは有限なので, それを開口 $g(x, y)$ で表す (瞳関数). 焦点距離を f [m] とする. レンズは点 (x, y) から焦点までの距離 $r' \equiv \sqrt{f^2 + x^2 + y^2}$ [m] に応じて素元波の位相をずらす性質 $h(x, y)$ を持つ. それはレンズ中心を位相の基準にとると次式のように書ける.

$$h(x, y) = \exp\{-ik(r' - f)\} \quad (8)$$

距離 R にあるスクリーン上での振幅分布は

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{i\lambda} \iint g(x, y) h(x, y) \frac{A \exp(ikr)}{r} dx dy \\ &= \frac{1}{i\lambda} \iint g(x, y) \frac{A \exp\{ik(r - r' + f)\}}{r} dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

スクリーンを焦点距離に配置する ($R = f$). 焦点距離は開口のサイズと比較してそれほど大きくないため、フラウンホーファー回折ではなくフレネル回折として扱う必要がある (付録 A 参照). このとき r, r' は次式のように近似される.

$$r \simeq f + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2f} \quad (10)$$

$$r' \simeq f + \frac{x^2 + y^2}{2f} \quad (11)$$

ここで式 (3), (10), (11) を式 (9) に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= A' \iint g(x, y) \exp\{-i(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy \\ &= A' G(\nu_x, \nu_y) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで A', ν_x, ν_y は次のように定義されている.

$$A' \equiv \frac{A}{i\lambda f} \exp\left\{ik\left(f + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2f}\right)\right\} \quad (13)$$

$$\nu_x \equiv \frac{k}{f} x_0, \quad \nu_y \equiv \frac{k}{f} y_0 \quad (14)$$

以上のように、レンズの場合には焦点においてフーリエ変換が得られる. 式 (12) と式 (5) は、対象としている距離 (遠距離 R が焦点距離 f か) 以外はまったく同じ形をしている.

前節でスクリーンを十分遠方に置くことにより無視した項 $(x^2 + y^2)/2R$ が、ここではレンズによって直接打ち消されている. すなわち、レンズは遠距離での現象を近距離 (焦点) にもってくる効果がある.

4. おわりに

本稿ではレンズとフーリエ変換の関係について解説した. これを知っていると、フーリエ変換の知識 [2] を援用して光学を考えることができる. 例えば望遠鏡の口径と分解能の関係は、フーリエ変換の前後の軸の伸縮で説明できる. また、開口 $g(x, y)$ を通過する光が濃淡分布 $t(x, y)$ を持つとき、フーリエ変換の畳み込み $G * T$ がスクリーン上に現れることが推察できる.

参考文献

- [1] 谷田貝豊彦: 現代人の物理 5 光とフーリエ変換, 朝倉書店, 1992.
- [2] 星貴之: フーリエ変換の世界観,
<http://star.web.nitech.ac.jp/pdf/100726doc.pdf>.

A 距離の近似

以下の展開・近似で式 (15) を採用するのがフレネル回折, さらに遠距離における強い近似を施した式 (16) を採用するのがフラウンホーファー回折である [1].

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2} \right]^2 + \dots \right\} \\ &\simeq R + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2R} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= R + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2(x x_0 + y y_0) + x^2 + y^2}{2R} \\ &\simeq R + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2R} - \frac{x x_0 + y y_0}{R} \end{aligned} \quad (16)$$

上述の近似では、波数 k をかけた上で 2π より十分に小さい成分を無視している. よってフレネル回折が成り立つ条件は次式で表される. ここで λ [m] は波長.

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{8R^3} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \right| &\ll 2\pi \\ R^3 &\gg \frac{1}{8\lambda} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2 \end{aligned} \quad (17)$$

しかし実用上はレンズの直後からフレネル回折を適用してよい. それは以下のように説明される. R が小さいときには式 (15) の第二項目の寄与が大きくなり、被積分項が x, y の変化によって正負に激しく振動する. このとき、位相変化が緩やかな $x = x_0, y = y_0$ 近傍のみが最終的な積分値に寄与する. したがって結局 $\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}/R^2$ の高次項を無視しても大きな影響はない.

また、フラウンホーファー回折が成り立つ条件は次式で表される.

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{2R} (x^2 + y^2) \right| &\ll 2\pi \\ R &\gg \frac{1}{2\lambda} (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (18)$$