フィルタの世界観

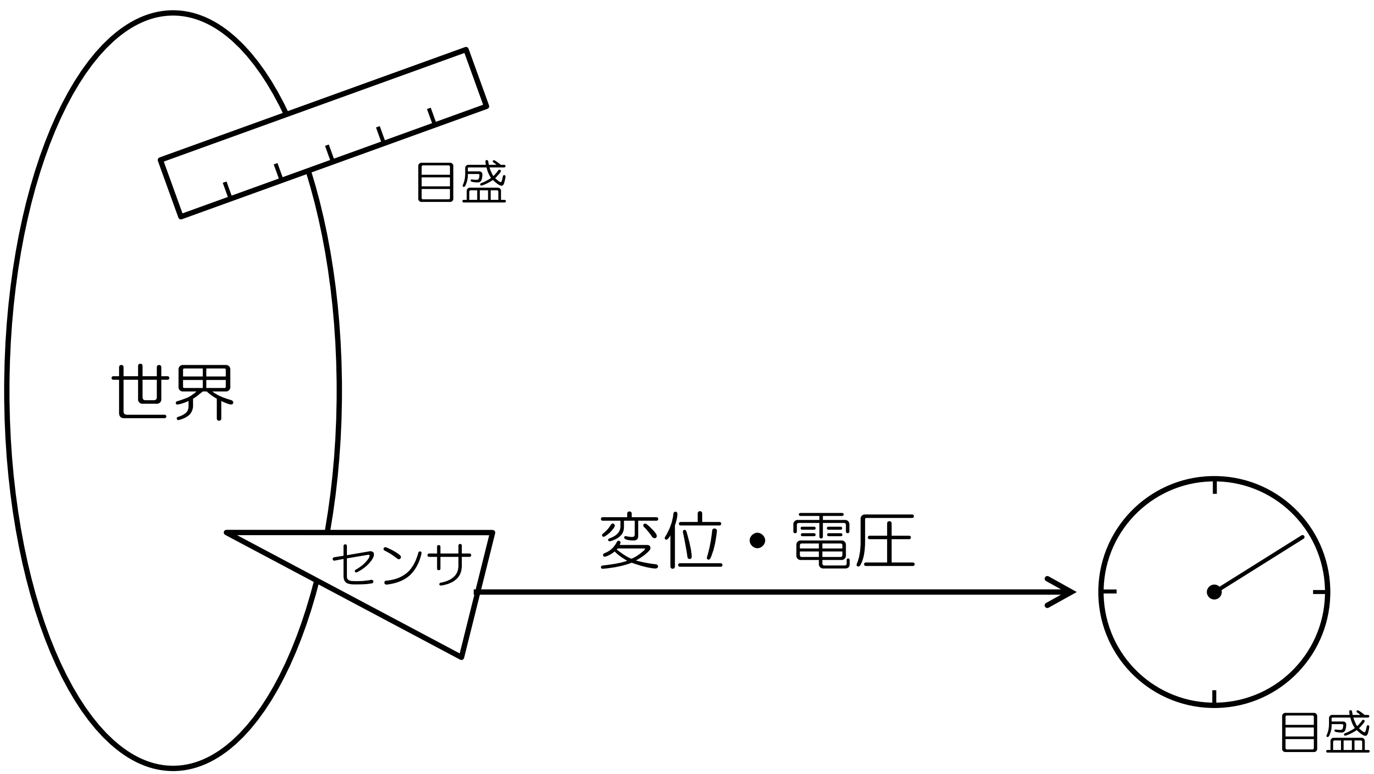
2013/01/01
星 貴之

もくじ

- 測るということ
- フーリエ変換のビジュアル的イメージ
- アナログフィルタの一番簡単な例
- A/D変換のビジュアル的イメージ
- ディジタルフィルタの一番簡単な例

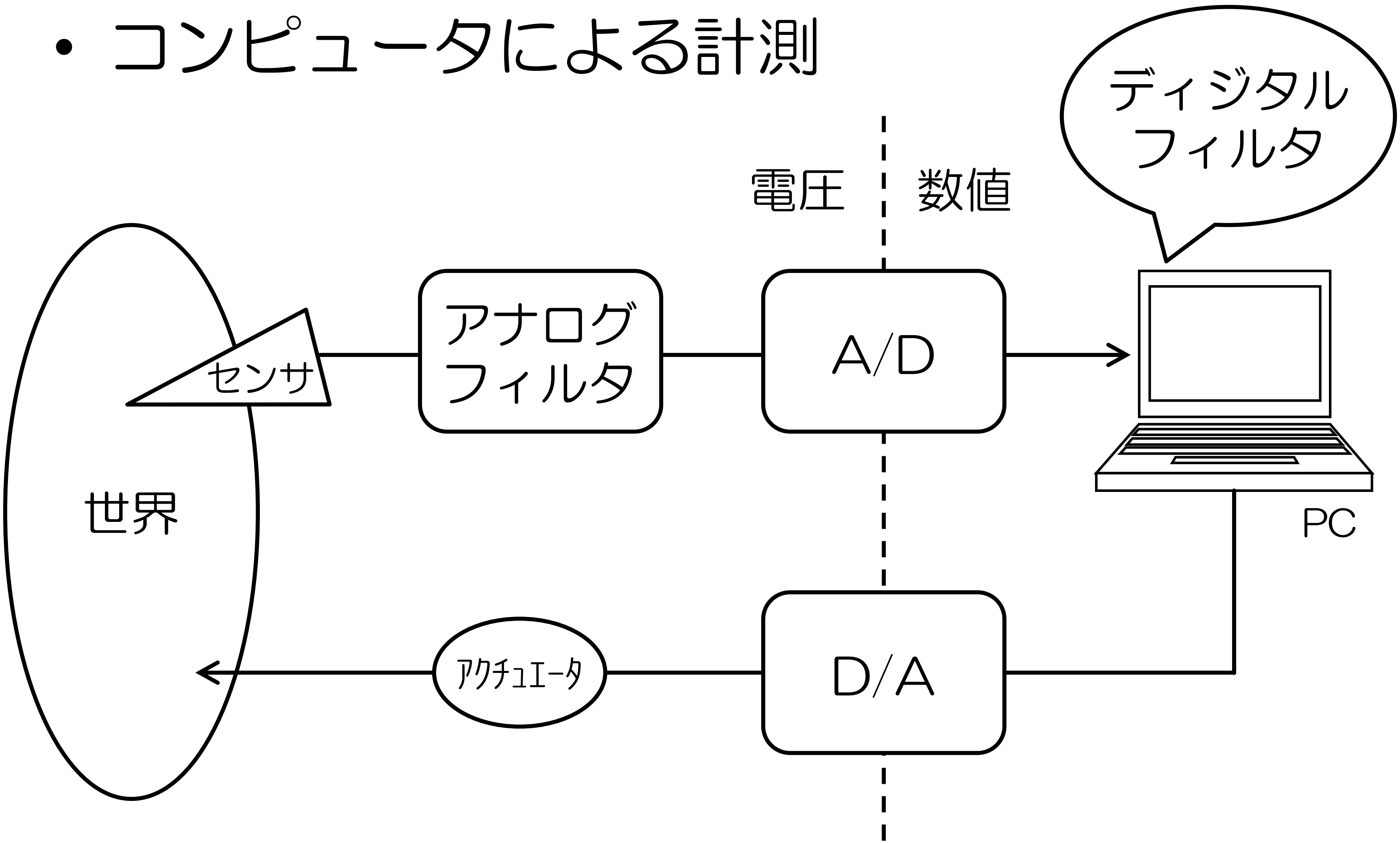
測るということ

- いにしえの計測（目盛を目視）
  - 長さ、温度、重さ、圧力、電流、・・・



測るということ

- コンピュータによる計測



フィルタ

- 不要な「物質」を取り除くためのもの
  - コーヒー
  - 掃除機
  - ・・・

- センサの場合：
  不要な「情報」を取り除くためのもの

有用な情報 vs 不要な情報

- 話し声 vs 風の音
- 電圧信号 vs ハムノイズ・熱雑音
- 可聴域 vs 超音波
- 写真 vs 手ブレ

予備知識

- フーリエ変換
- 解析信号／フェーザー
- 負の周波数

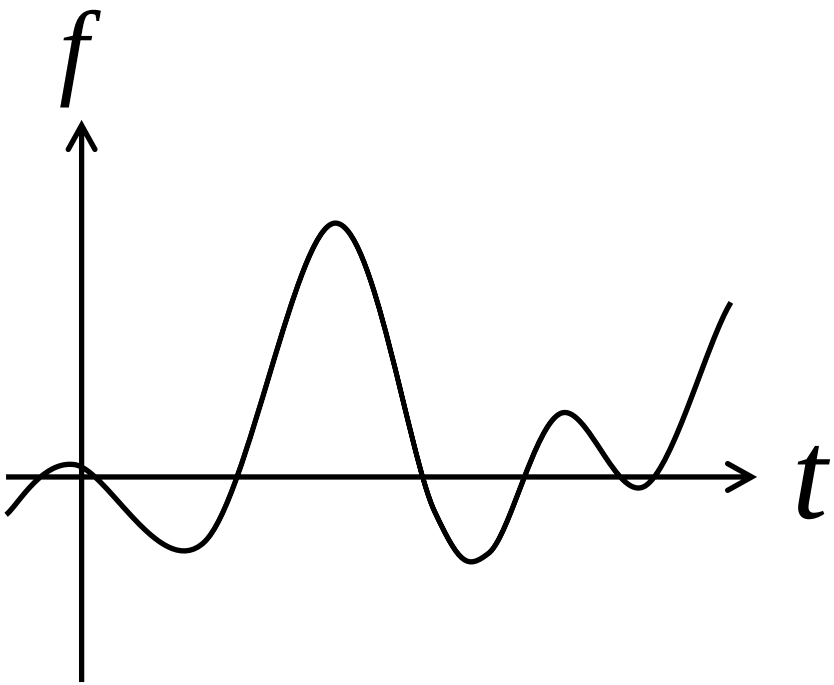
フーリエ変換

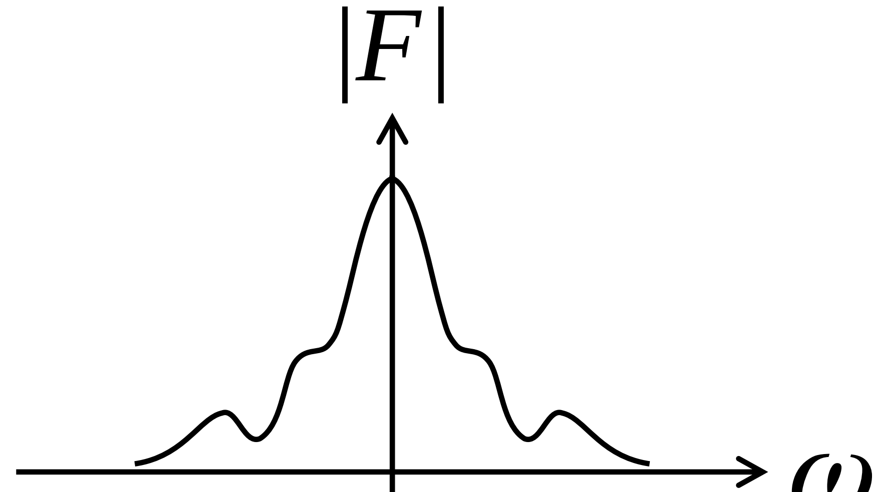
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

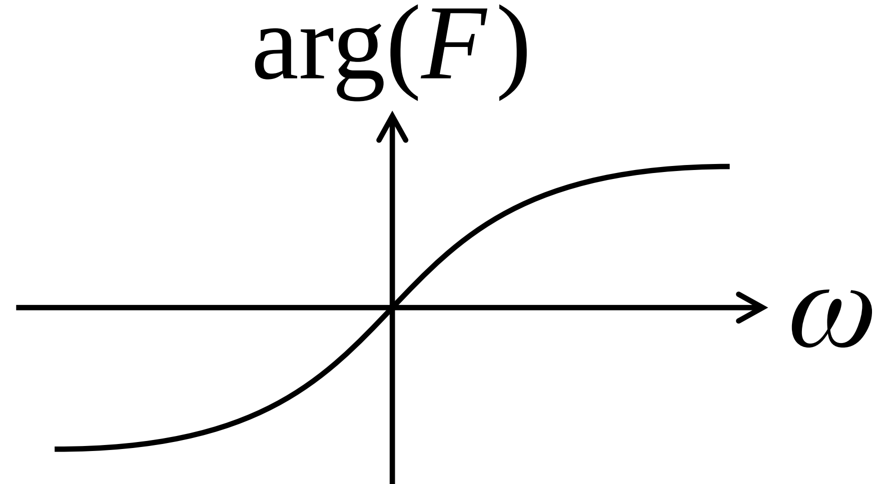
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

フーリエ変換

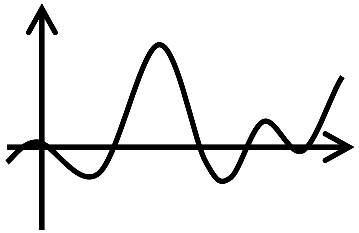
- 時間軸上での現象の周波数軸上での姿を見せてくれる道具





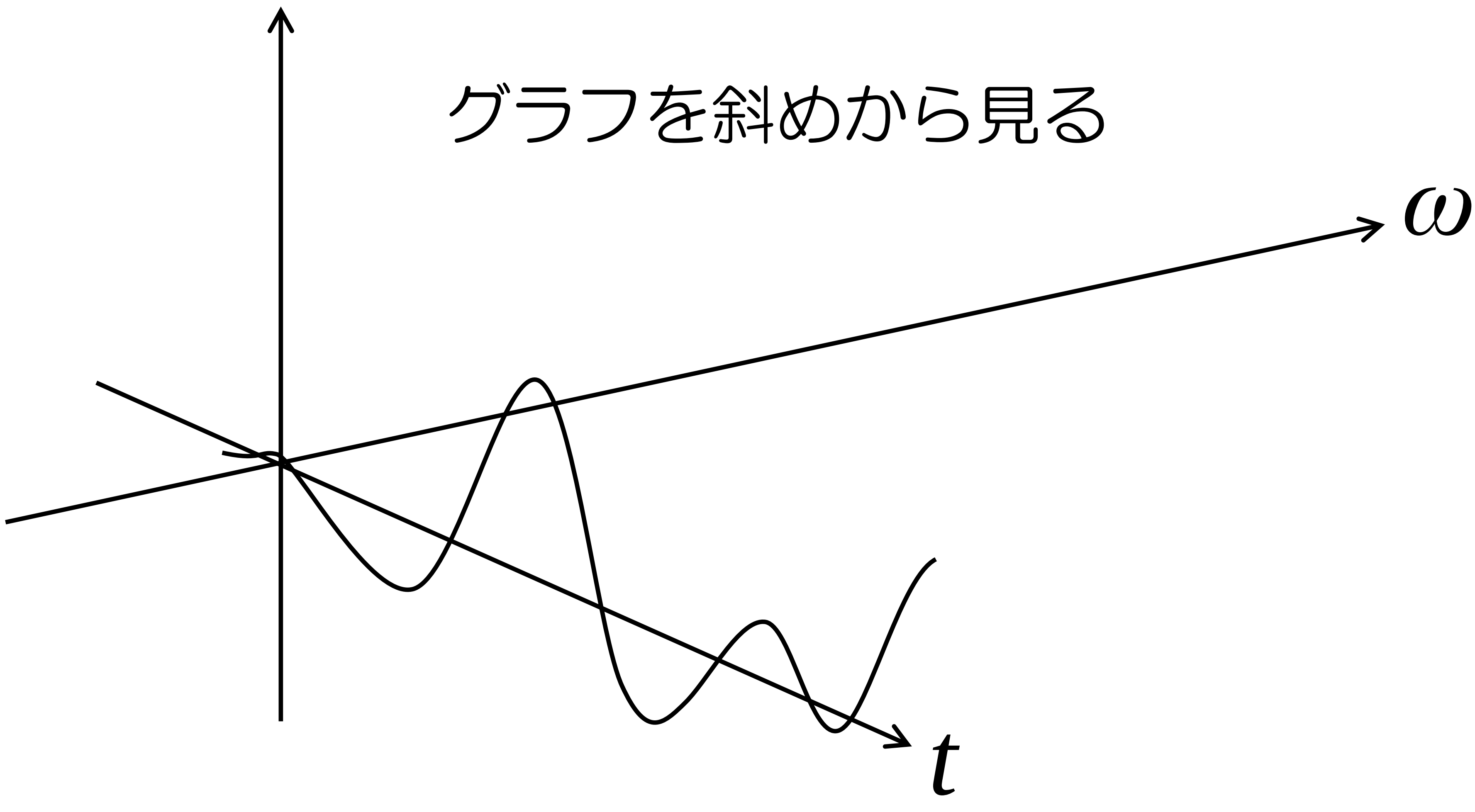


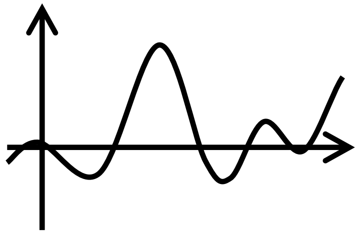
位相を考慮しない
場合も多い



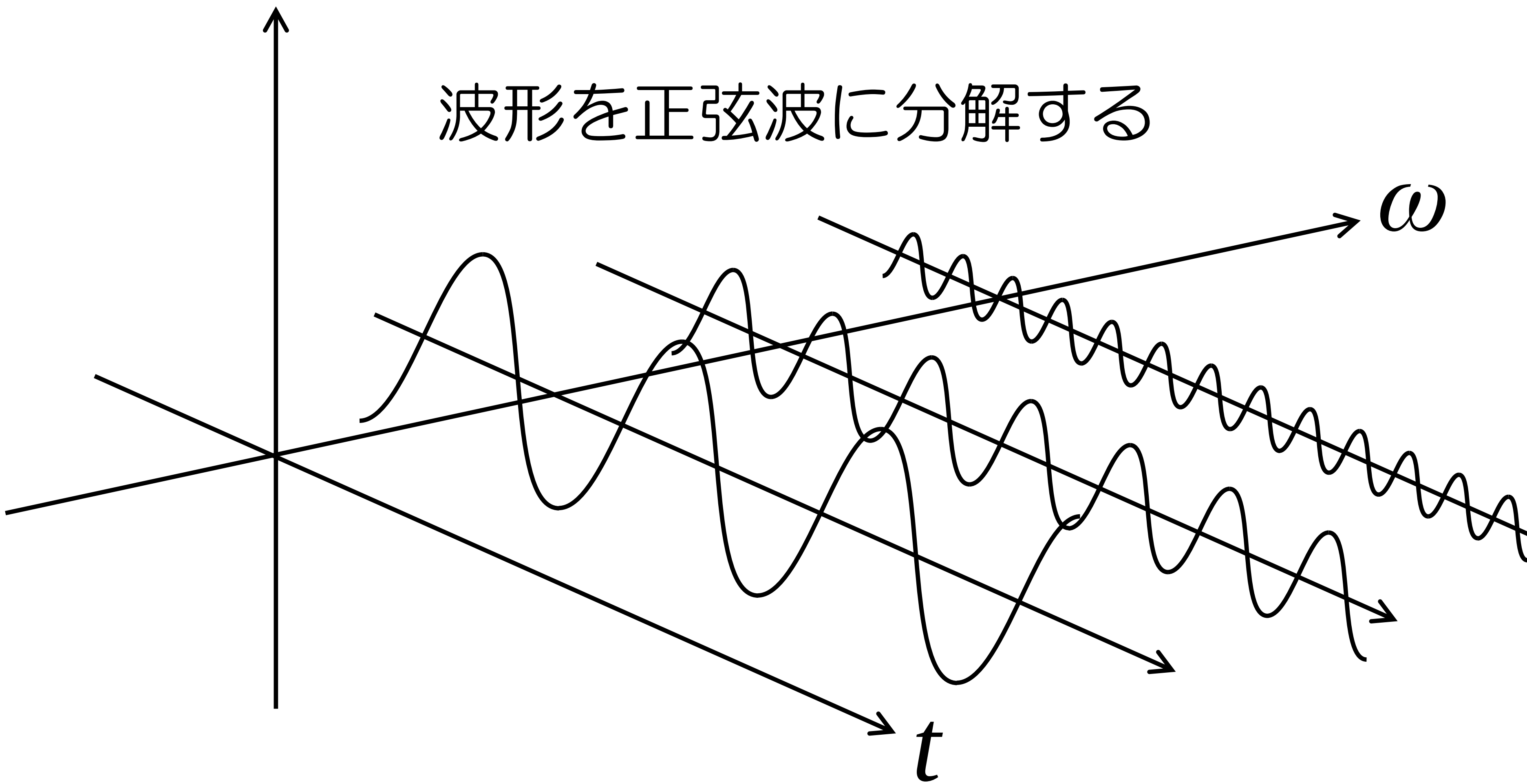
フーリエ変換

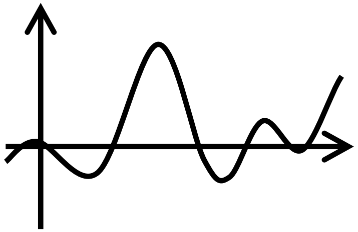
グラフを斜めから見る



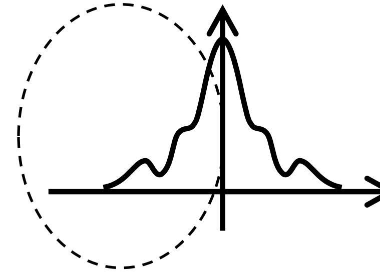


フーリエ変換

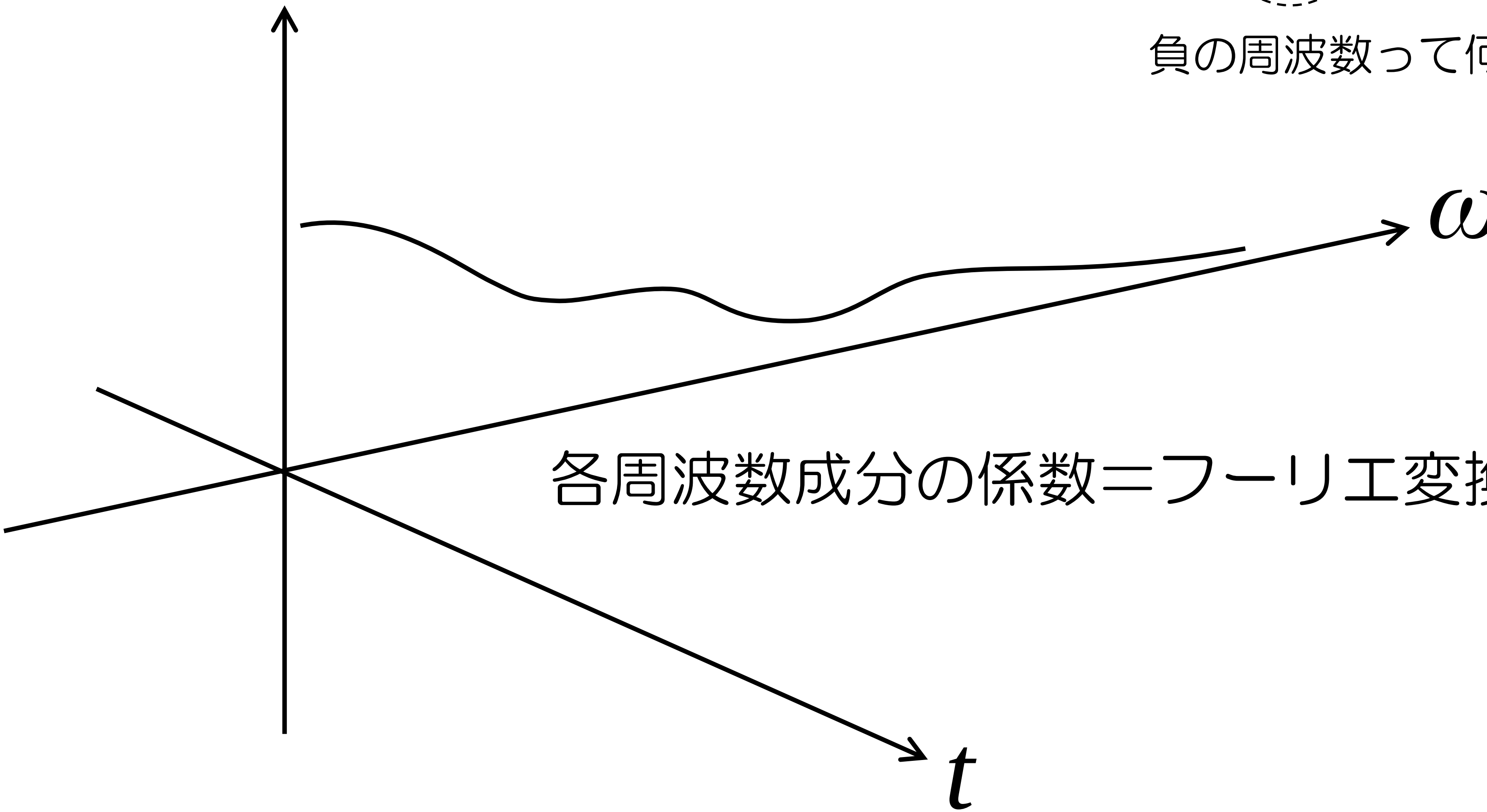




フーリエ変換



負の周波数って何？

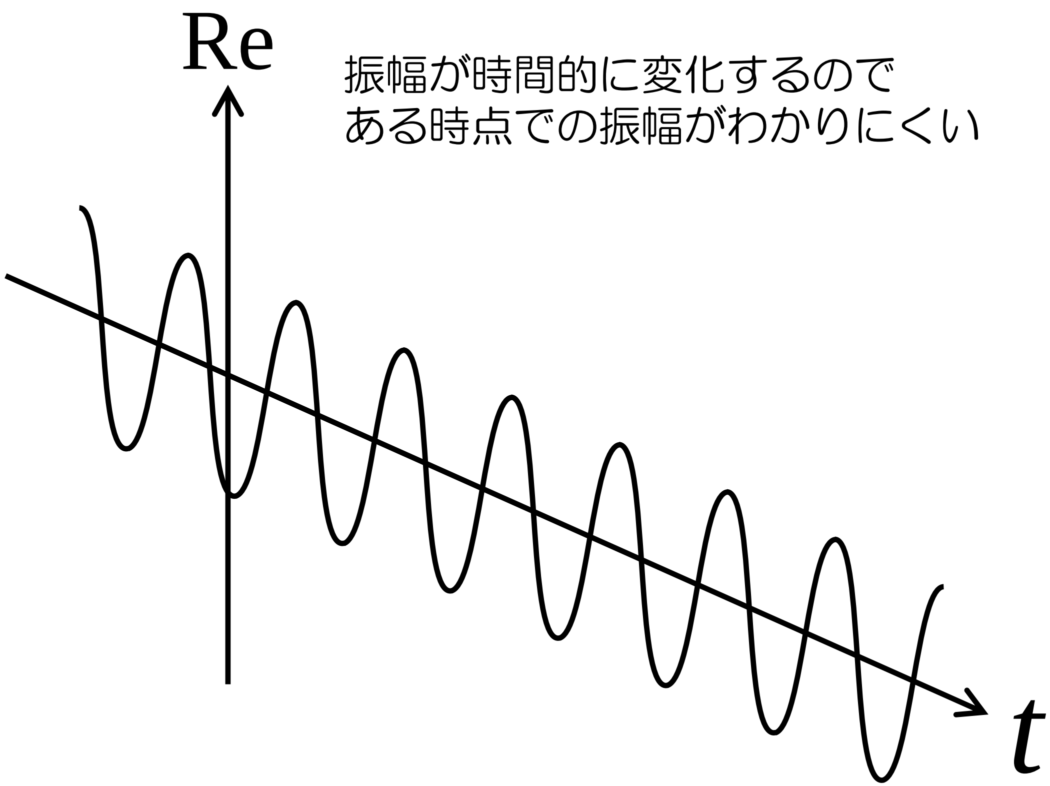


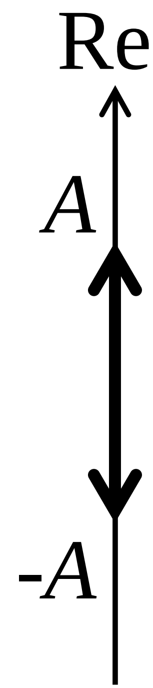
各周波数成分の係数＝フーリエ変換

実信号

$$x(t) = A\,\mathrm{c}(\omega t + \phi)$$

振幅が時間的に変化するので
ある時点での振幅がわかりにくい

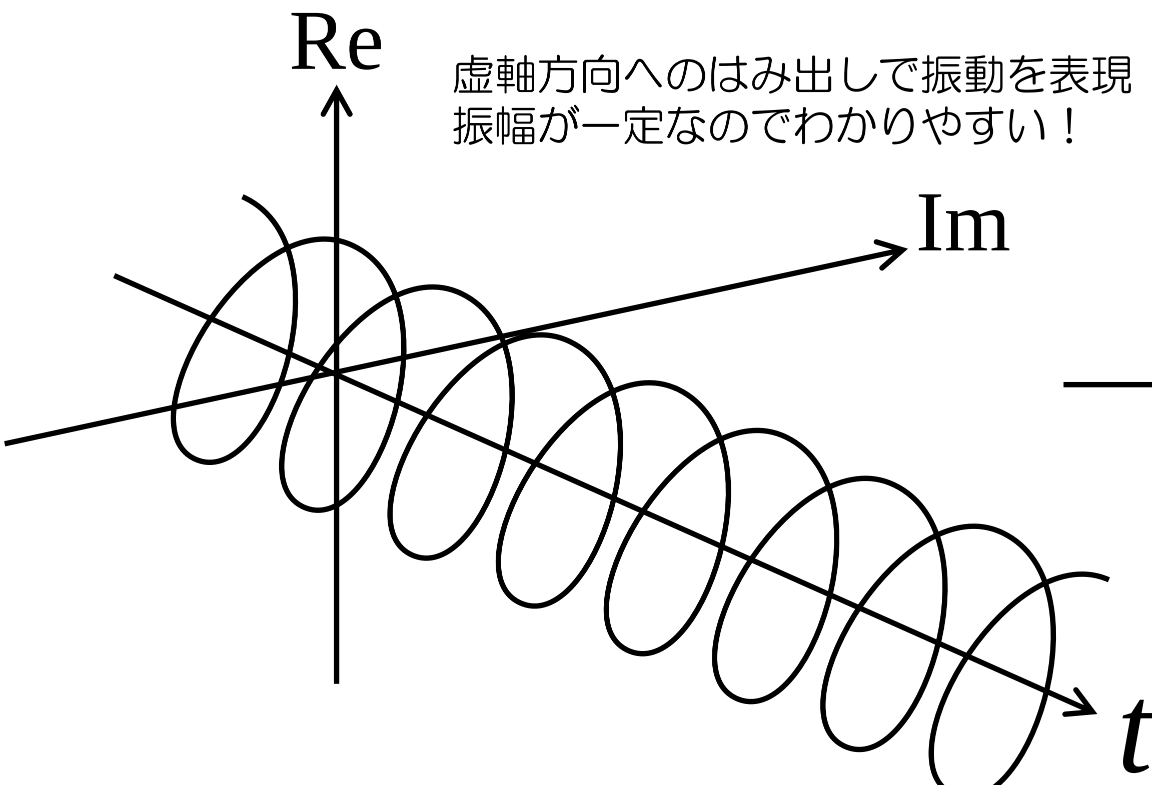


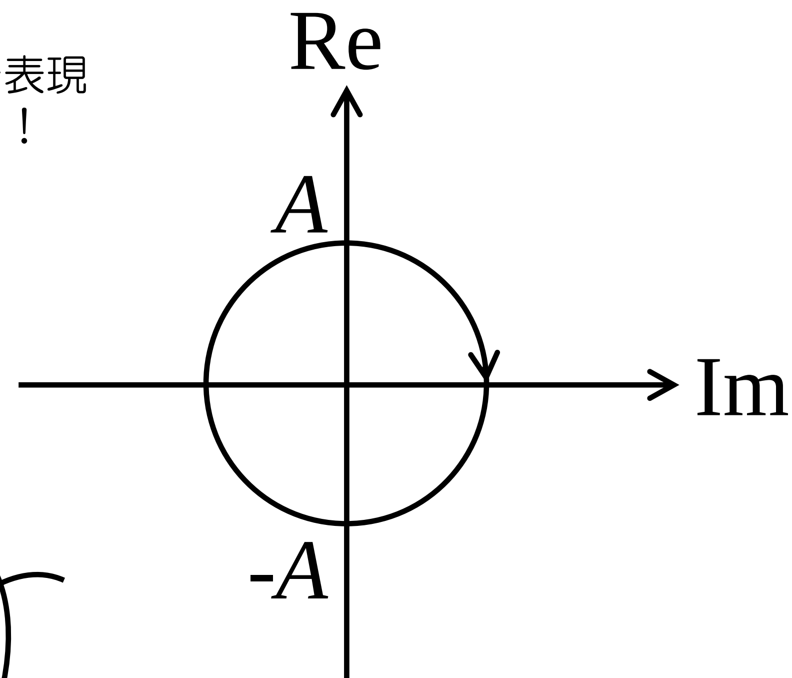


解析信号／フェーザー

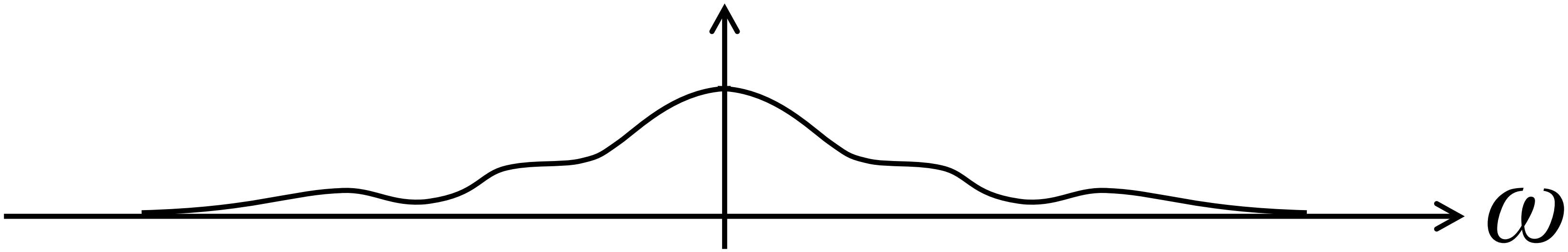
$$z(t) = A\{\mathrm{c}(\omega t + \phi) + \mathrm{j}\mathrm{s}(\omega t + \phi)\} \equiv A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi)}$$

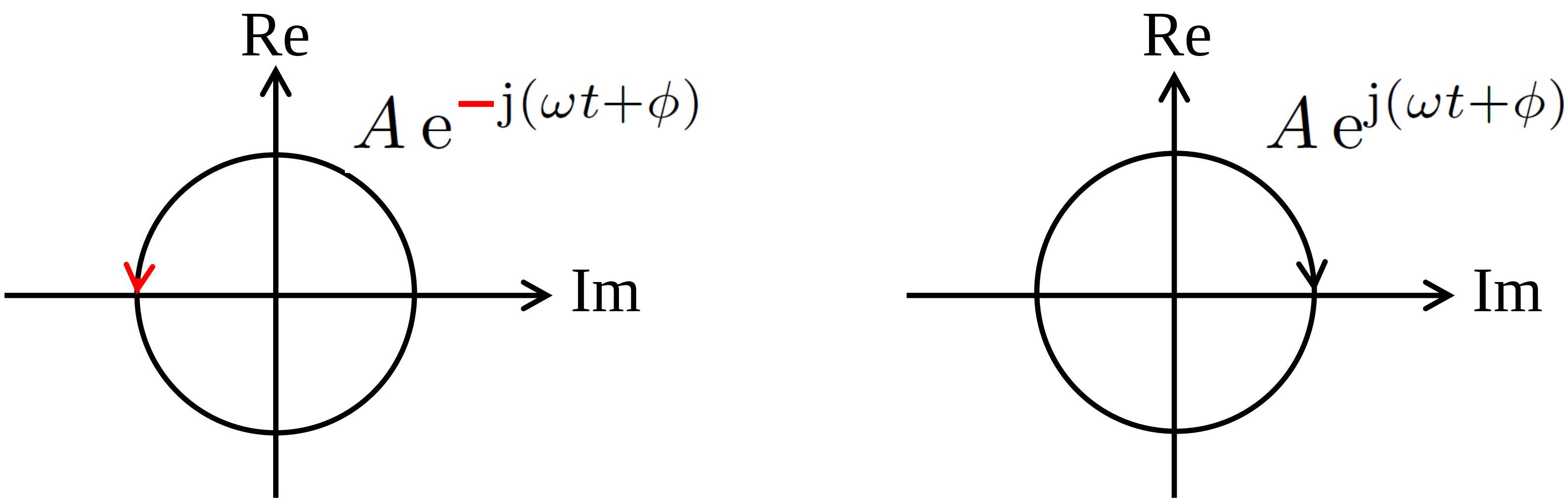
虚軸方向へのはみ出しで振動を表現
振幅が一定なのでわかりやすい！





負の周波数





実関数のフーリエ変換が左右対称※ なのは
虚数成分が相殺して全体が実数になるため

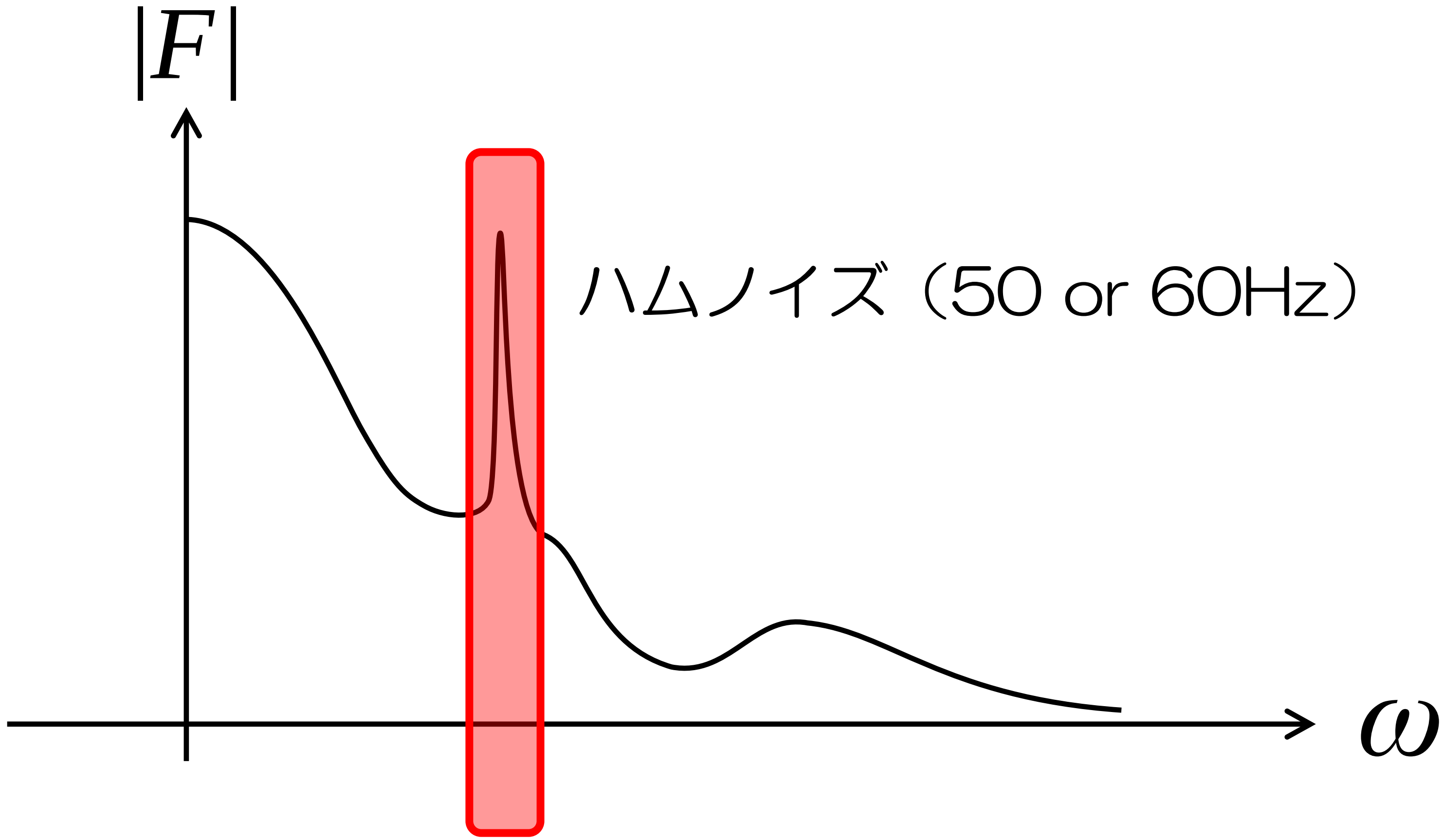
※ 厳密には $F(\omega) = F(-\omega)^*$

予備知識

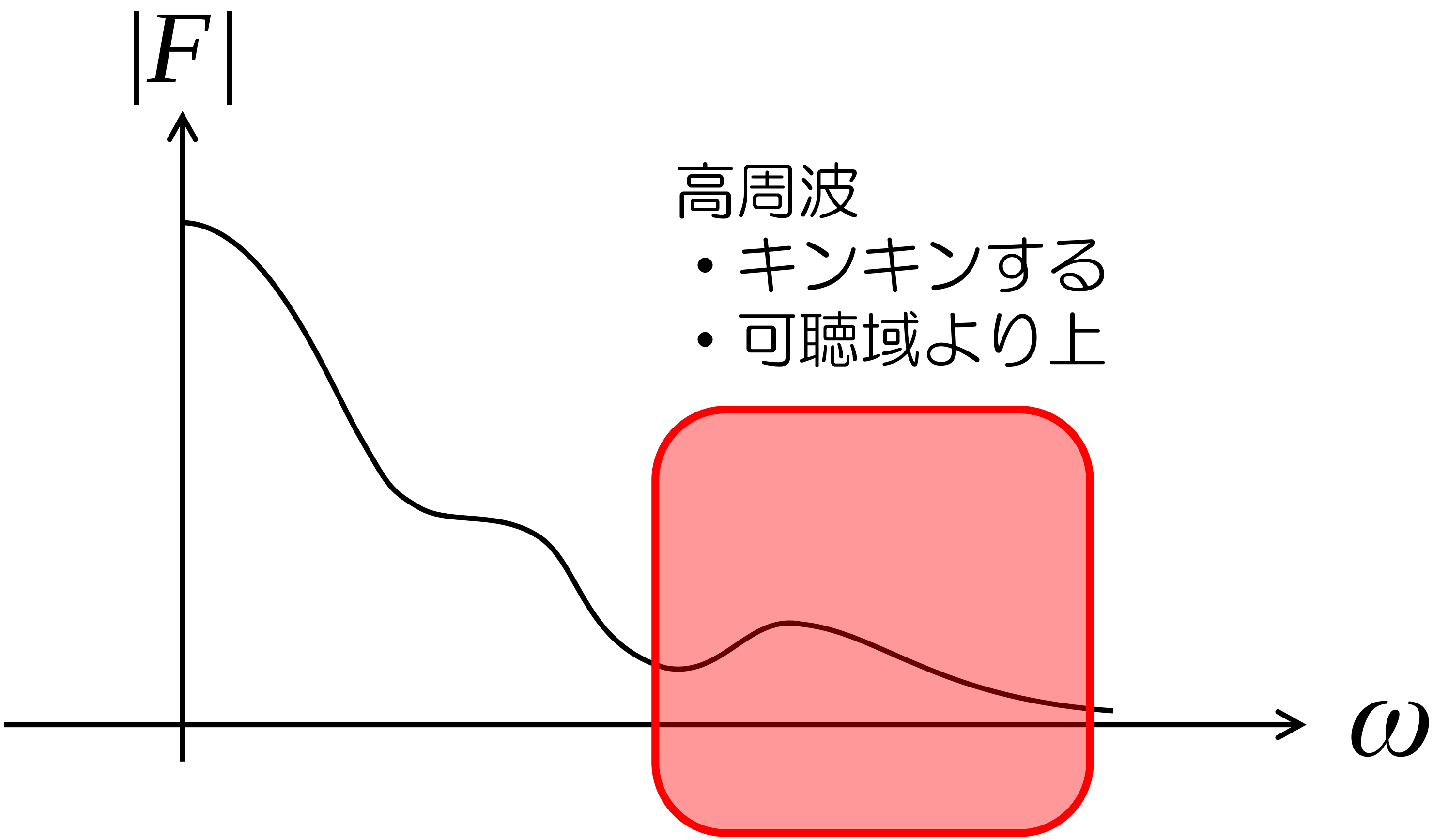
- フーリエ変換の意味
- 解析信号／フェーザー
- 負の周波数

⟶ フィルタについての説明に戻る

有用な情報 vs 不要な情報



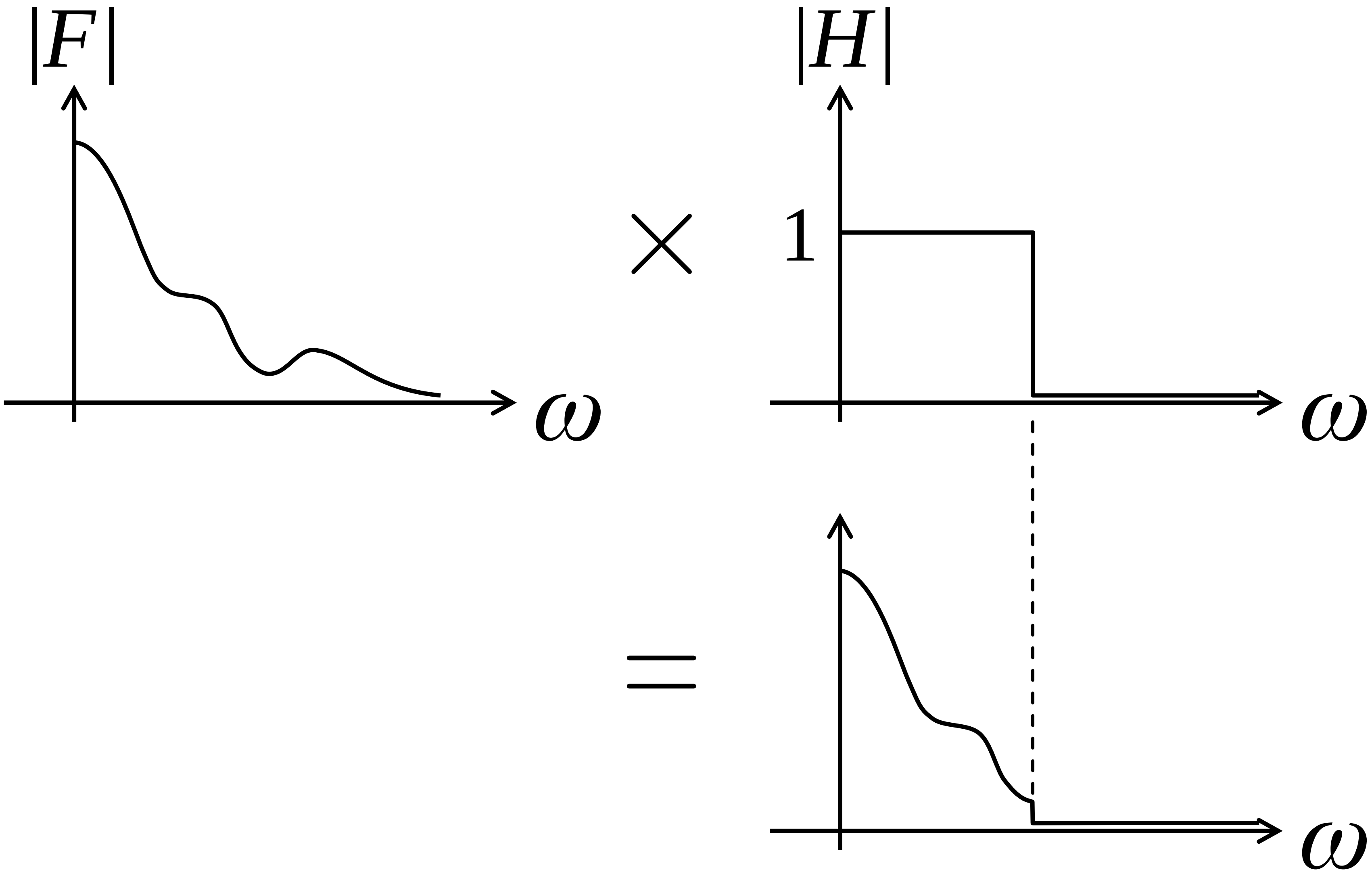
有用な情報 vs 不要な情報



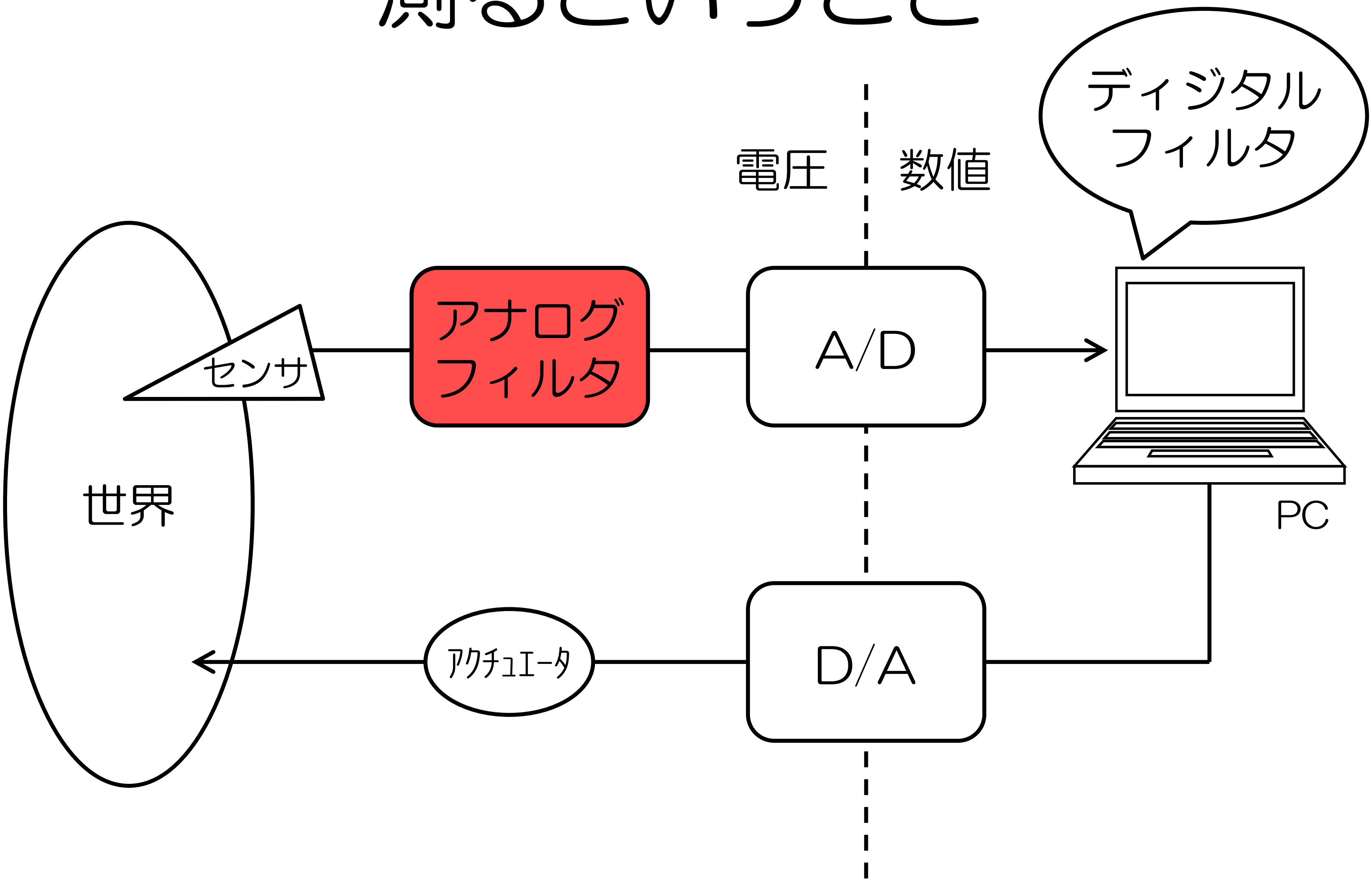
高周波

- キンキンする
- 可聴域より上

LPF



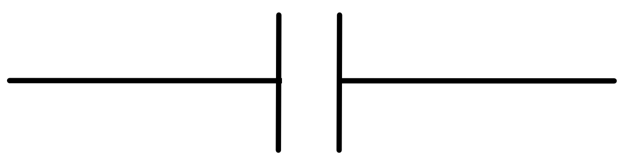
測るということ



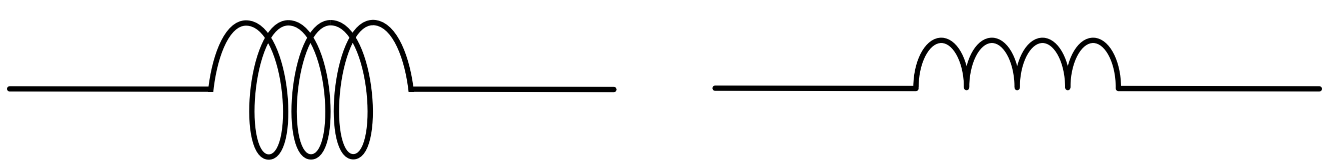
回路素子

- 抵抗：R

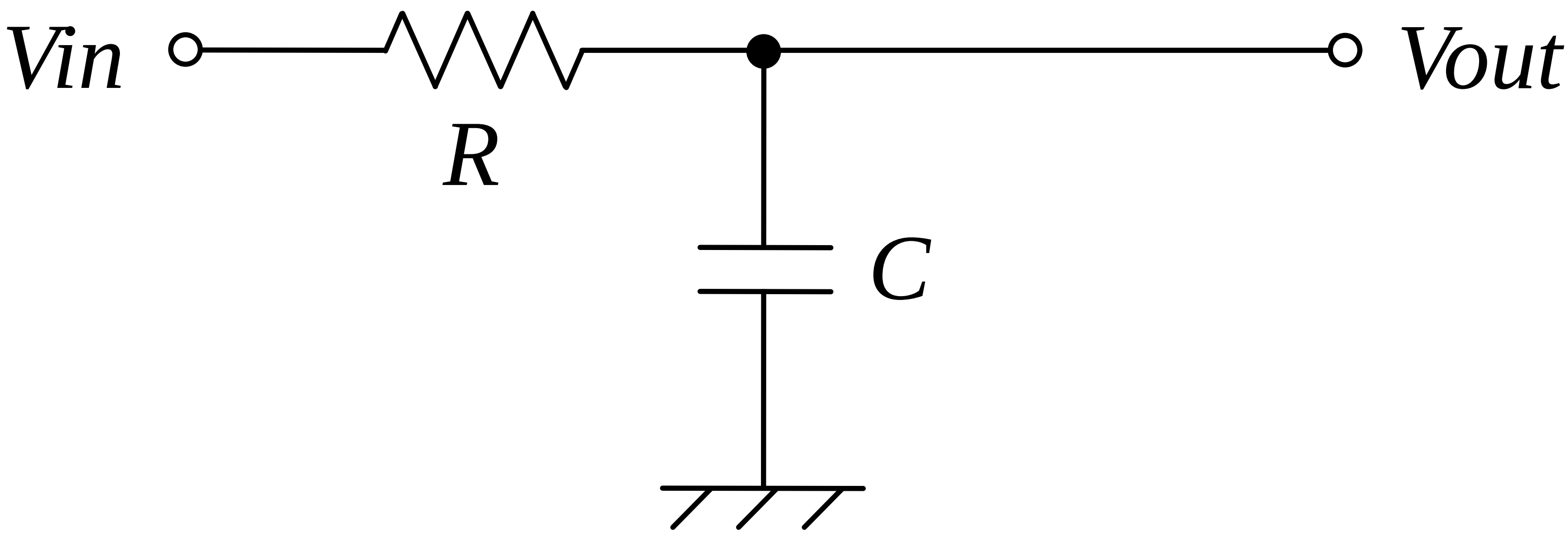
- コンデンサ：$1/\mathrm{j}\omega C$



- コイル：$\mathrm{j}\omega L$



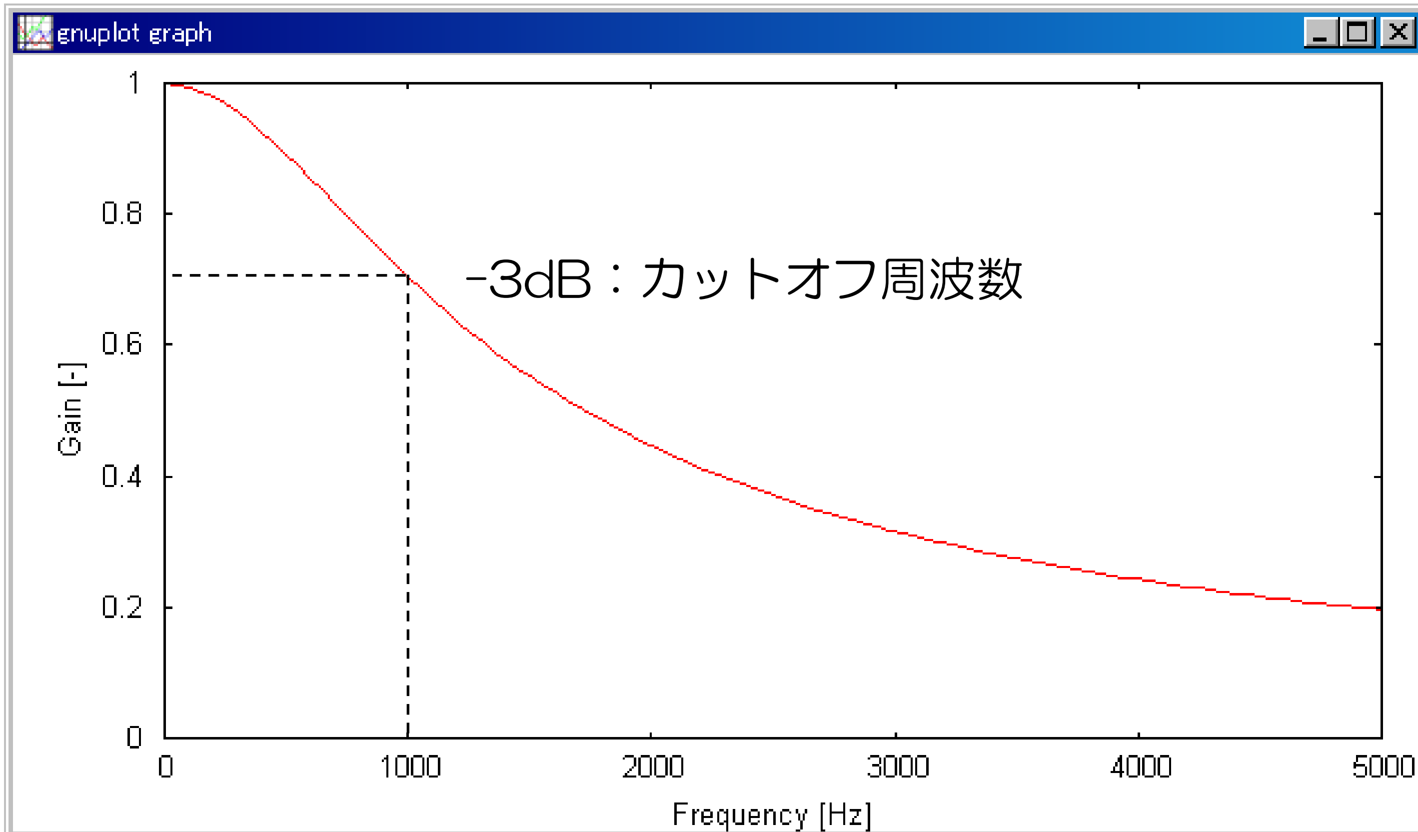
アナログフィルタ（LPF）



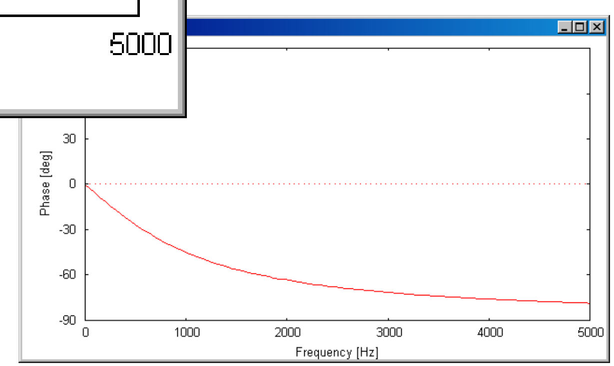
導出してみよう！

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega CR}$$

アナログフィルタ（LPF）

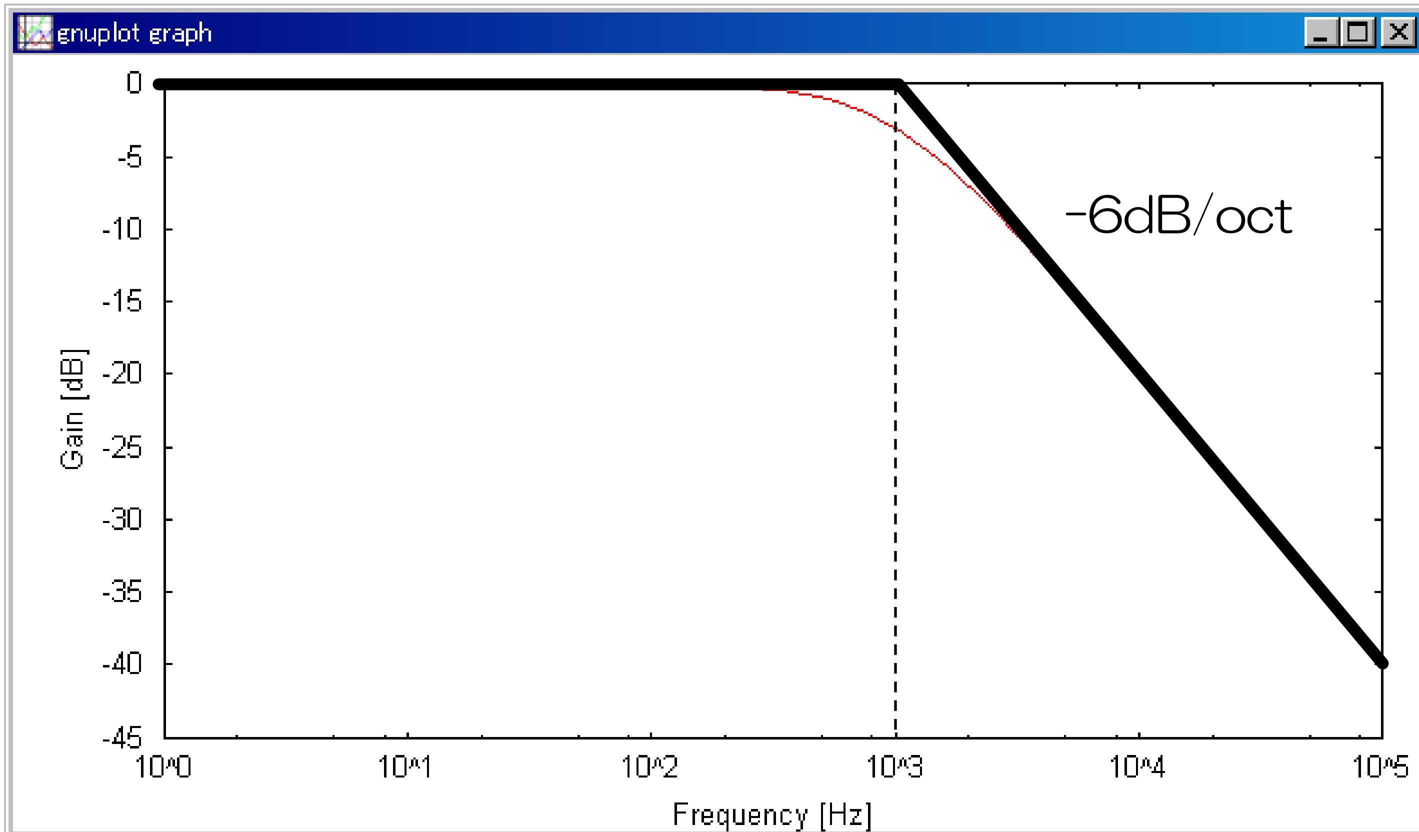


$$\frac{1}{1 + j\omega CR}$$



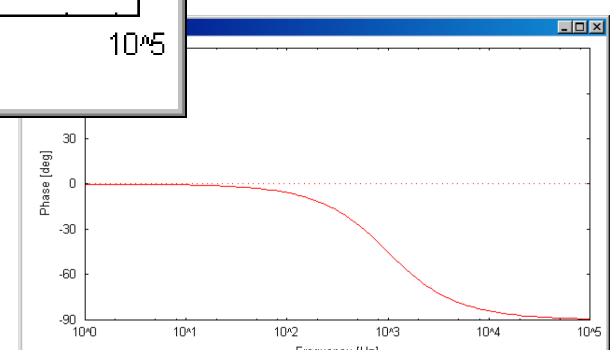
$$R = 1.6\ \mathrm{k}\Omega,\ C = 0.1\ \mu\mathrm{F}$$

アナログフィルタ（LPF）

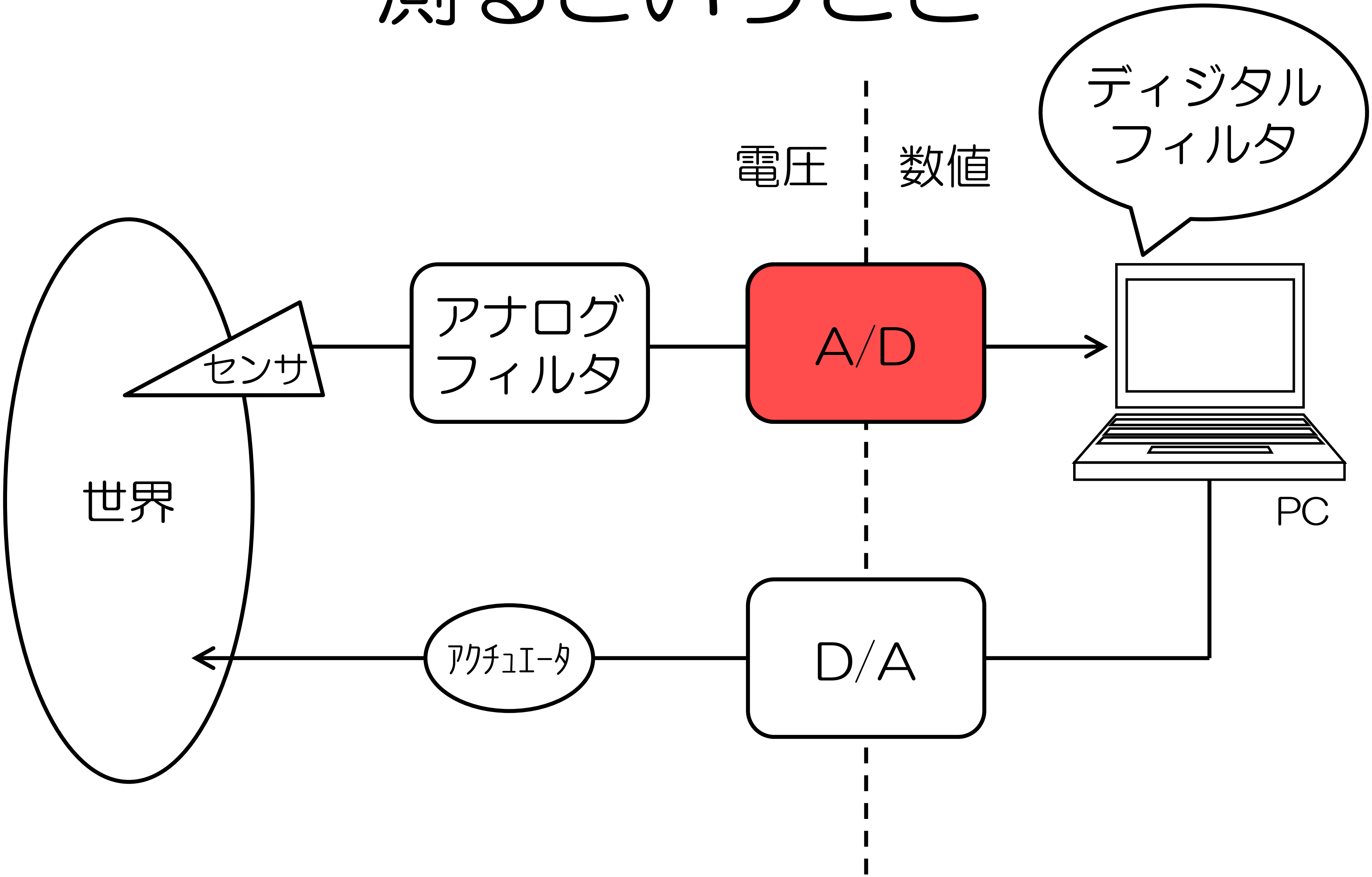


$$\frac{1}{1+j\omega CR}$$

$$R = 1.6\ \mathrm{k}\Omega,\ C = 0.1\ \mu\mathrm{F}$$

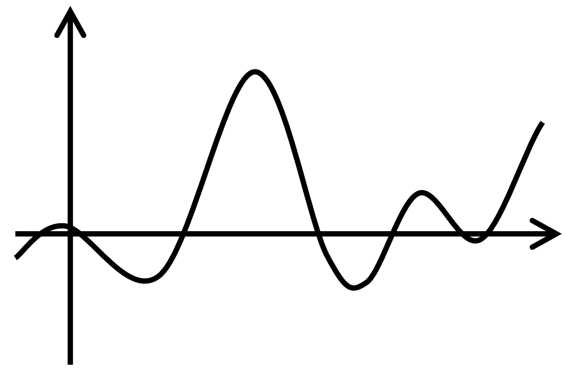


測るということ



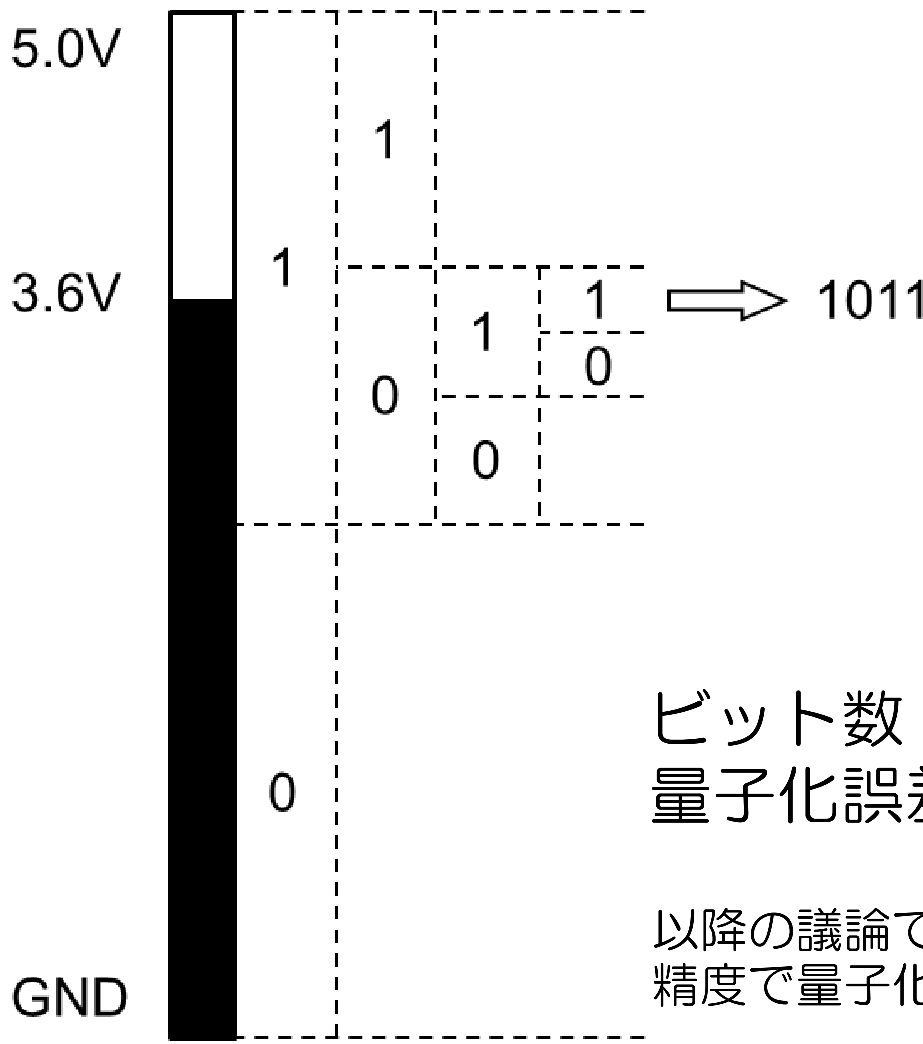
A/D変換

- 量子化（縦軸の離散化）
  - ビット数
  - 量子化誤差



- 標本化（横軸の離散化）
  - 標本化定理（サンプリング定理）
  - ナイキスト周波数
  - エイリアシング（折り返し雑音）

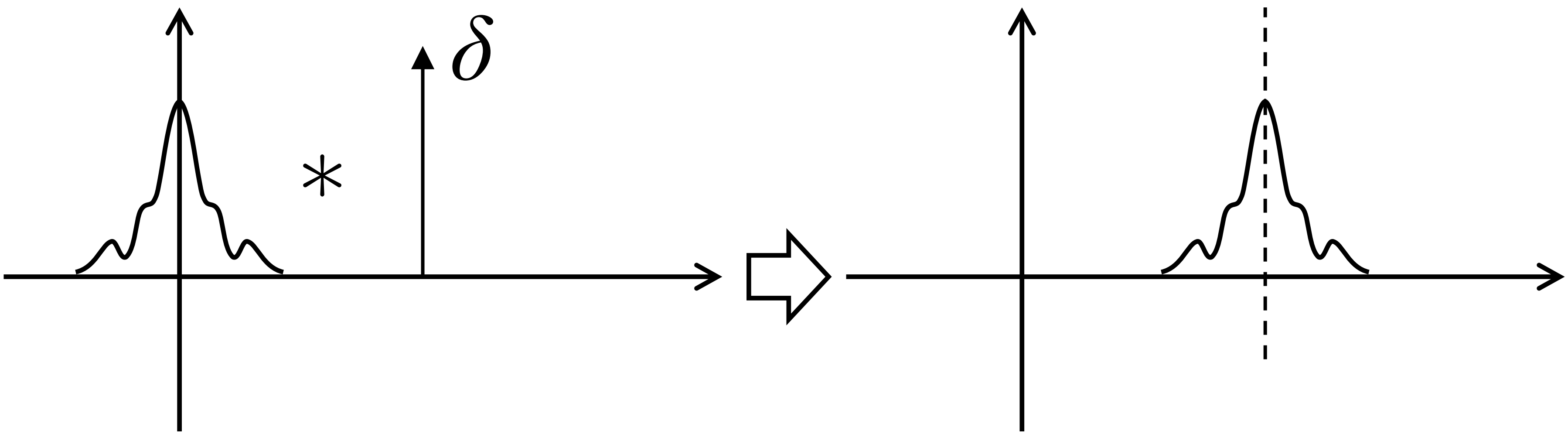
量子化



ビット数　：4 bit
量子化誤差：0.3125 V

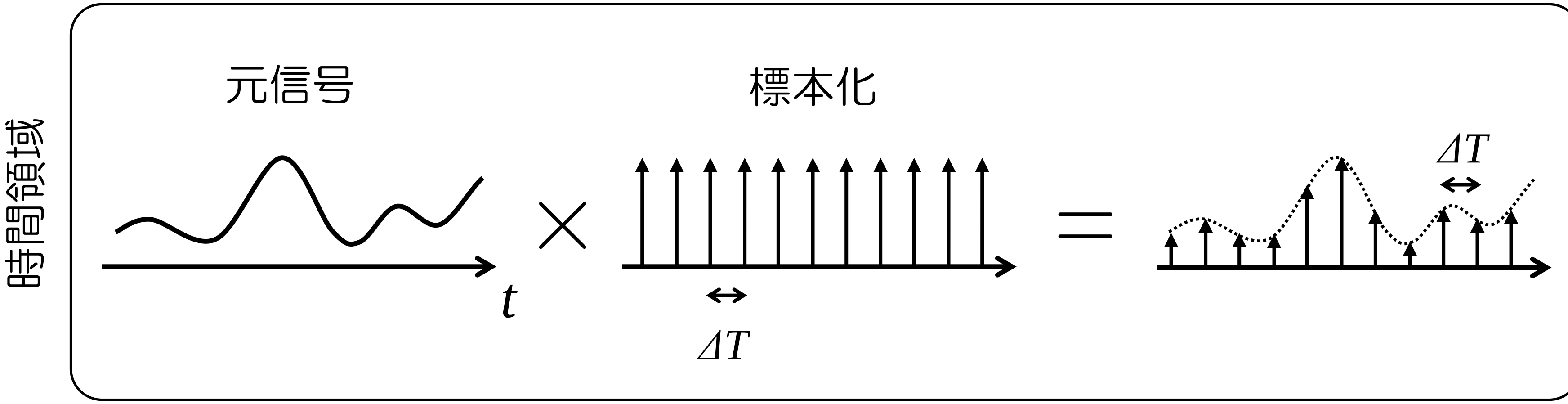
以降の議論では目的に対して十分な
精度で量子化されていることを仮定

予備知識：デルタ関数

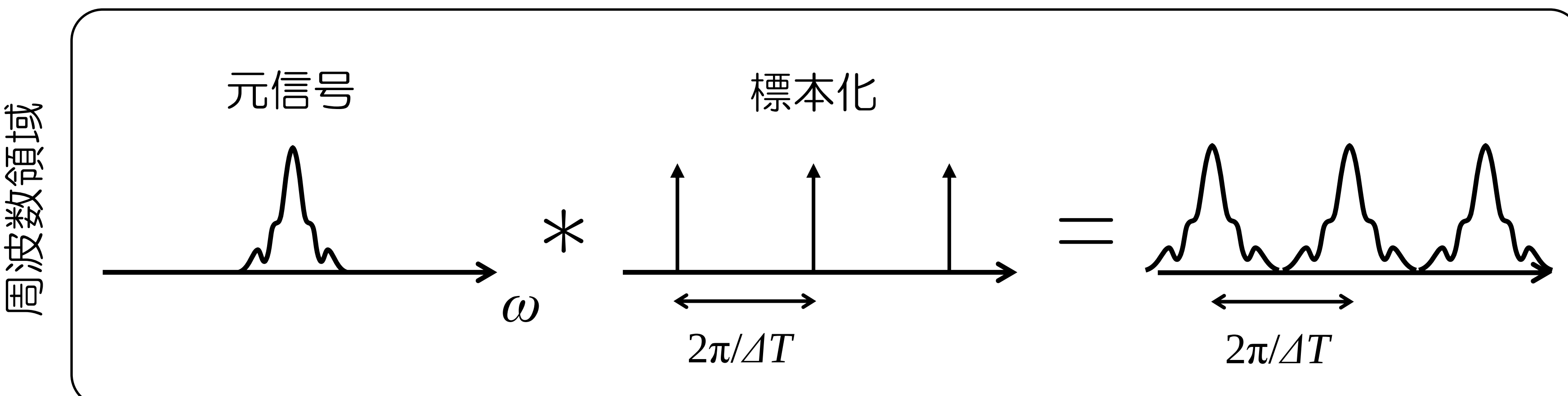


- 一か所でのみ値を持つ
- 畳み込みにより関数の位置を移動させる

標本化

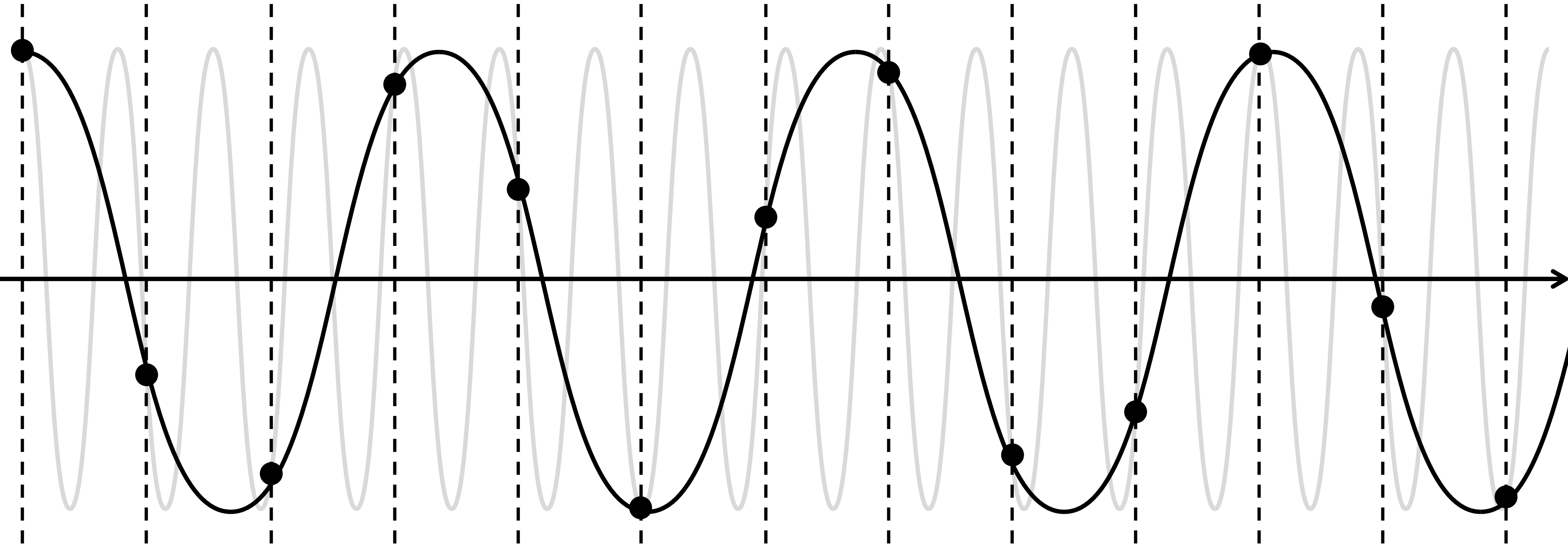


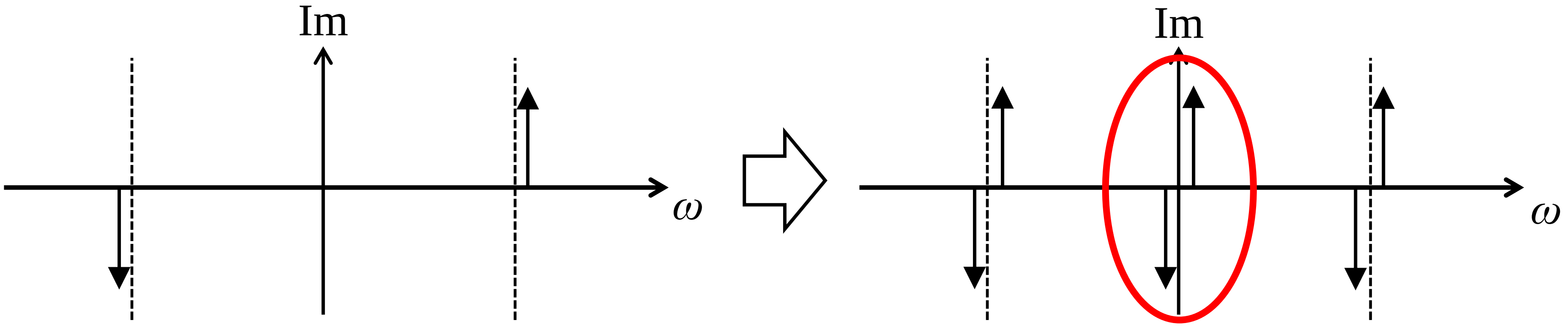
時間領域
元信号
標本化
t
×
ΔT
=
ΔT



周波数領域
元信号
標本化
ω
*
$2\pi/\Delta T$
=
$2\pi/\Delta T$

エイリアシング



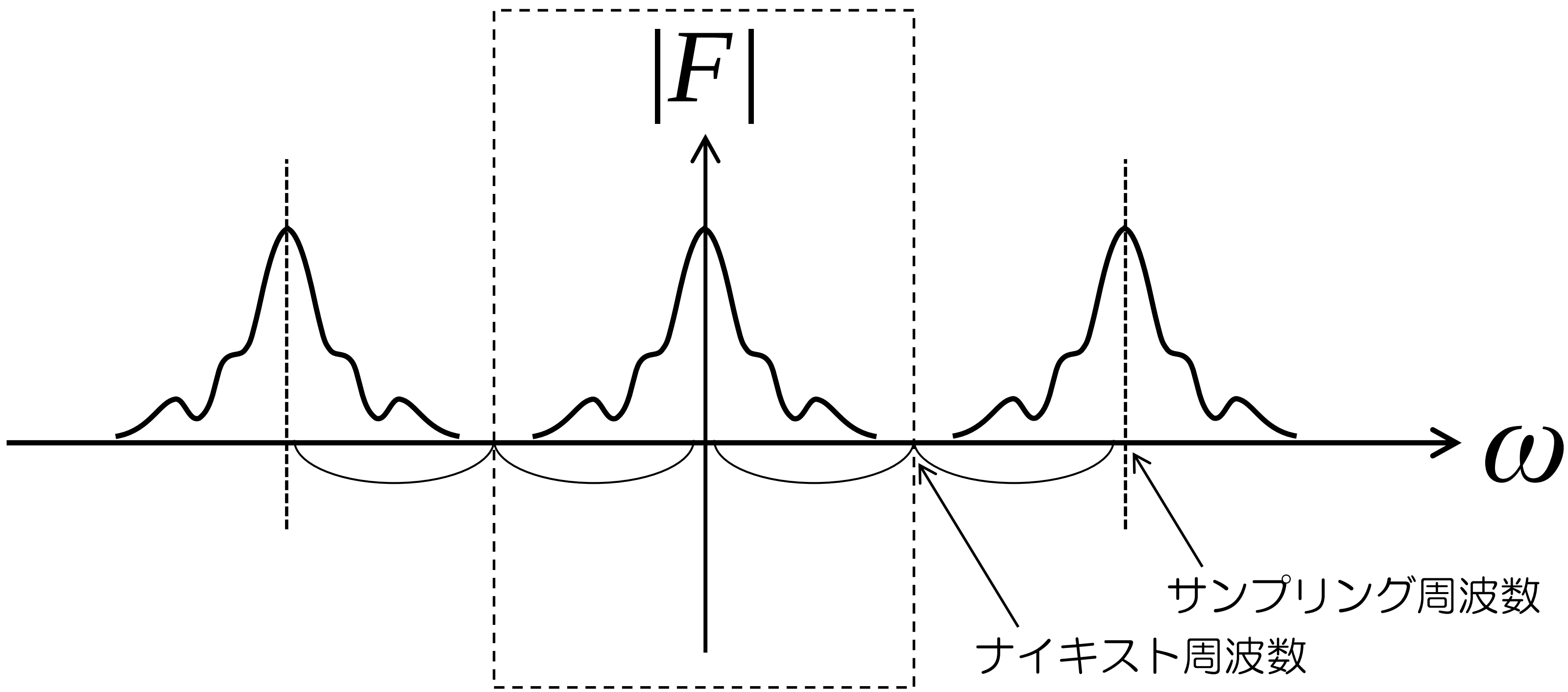


エイリアシング

- 自動車の映像で車輪が逆回転して見える
- Time Fountain
  http://youtu.be/rvY7NGncCgU
- Stop Motion Goggles
  http://youtu.be/zOrKwT7e364
- ・・・

標本化定理

①元の情報がサンプリングによる複製と重なってしまう（エイリアンシング）と困る。
②サンプリング周波数の半分（ナイキスト周波数）以下に帯域制限してあれば大丈夫。
③A/D変換の前に帯域制限用のLPF（アンチエイリアスフィルタ）を設置するのが定石。



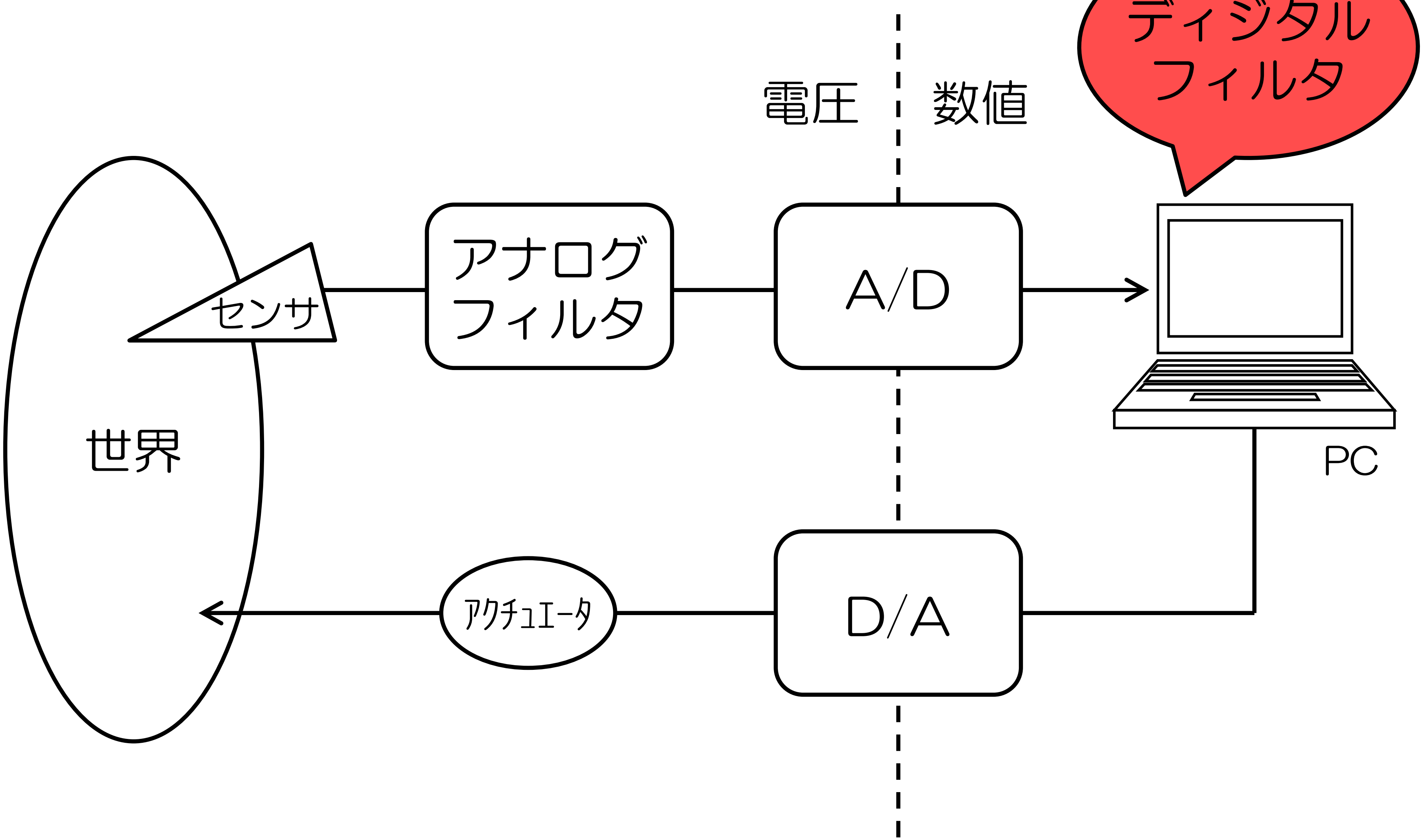
④ここ↑だけLPFで取り出せば元信号
が完全に復元できる！（標本化定理）

A/D変換

- 量子化（縦軸の離散化）
  - ビット数
  - 量子化誤差

- 標本化（横軸の離散化）
  - 標本化定理（サンプリング定理）
  - ナイキスト周波数
  - エイリアシング（折り返し雑音）
  - アンチエイリアスフィルタ（ディジタル世界の平和を守る番人）

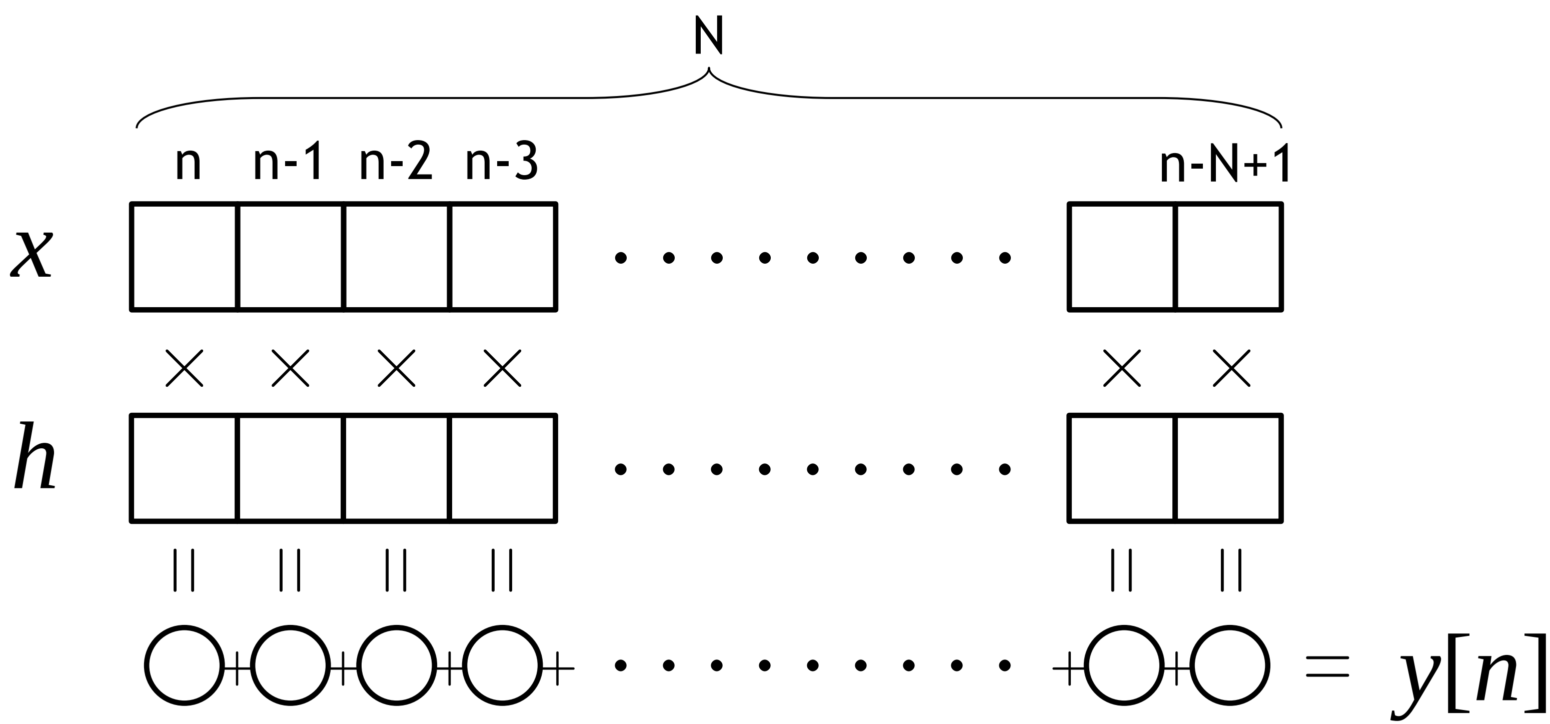
測るということ



ディジタルフィルタ（FIR）

$$[n] = (nT)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$



ディジタルフィルタ（移動平均）

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

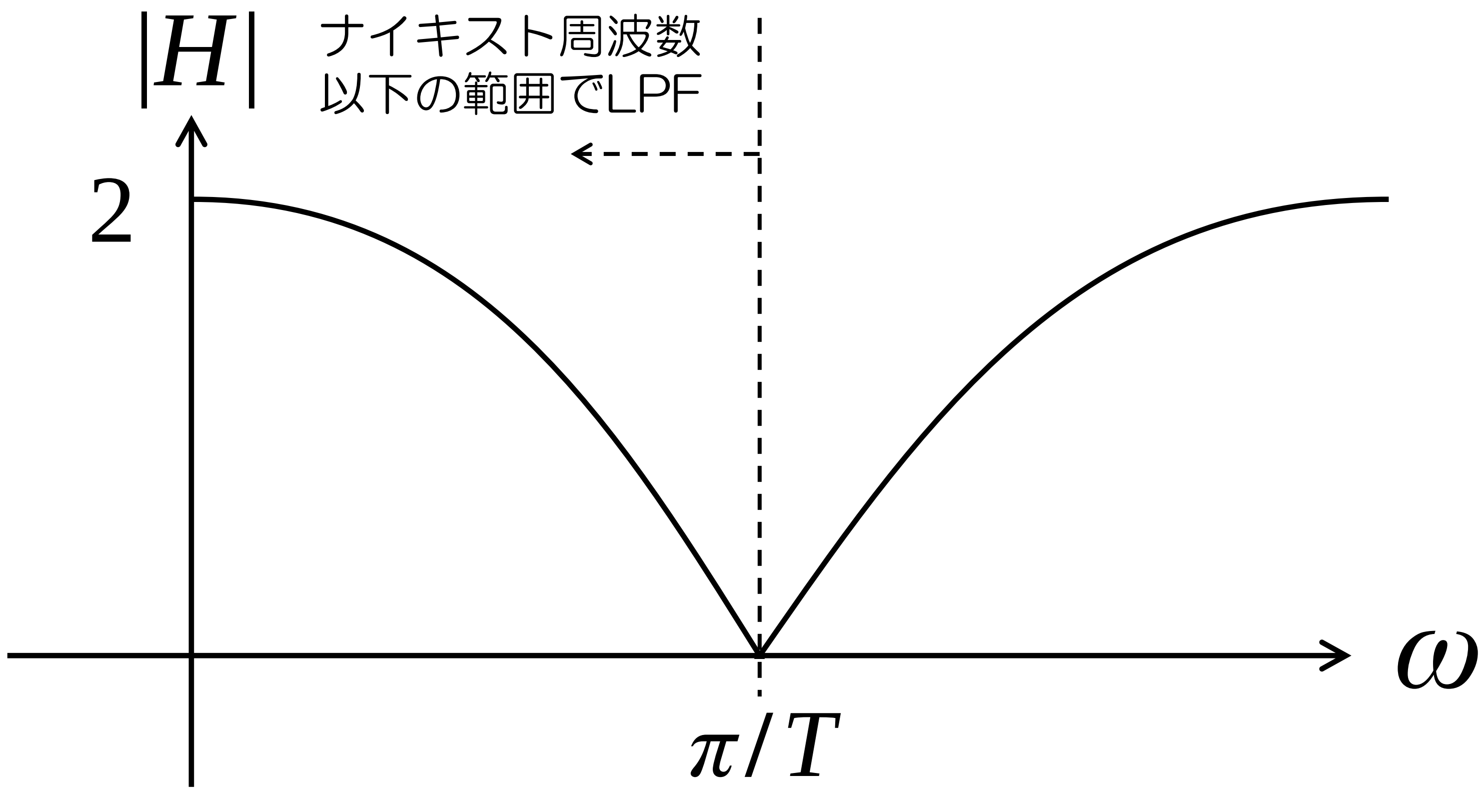
$[n] = (nT)$

$$h[k] = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad k = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\downarrow$ 導出してみよう！

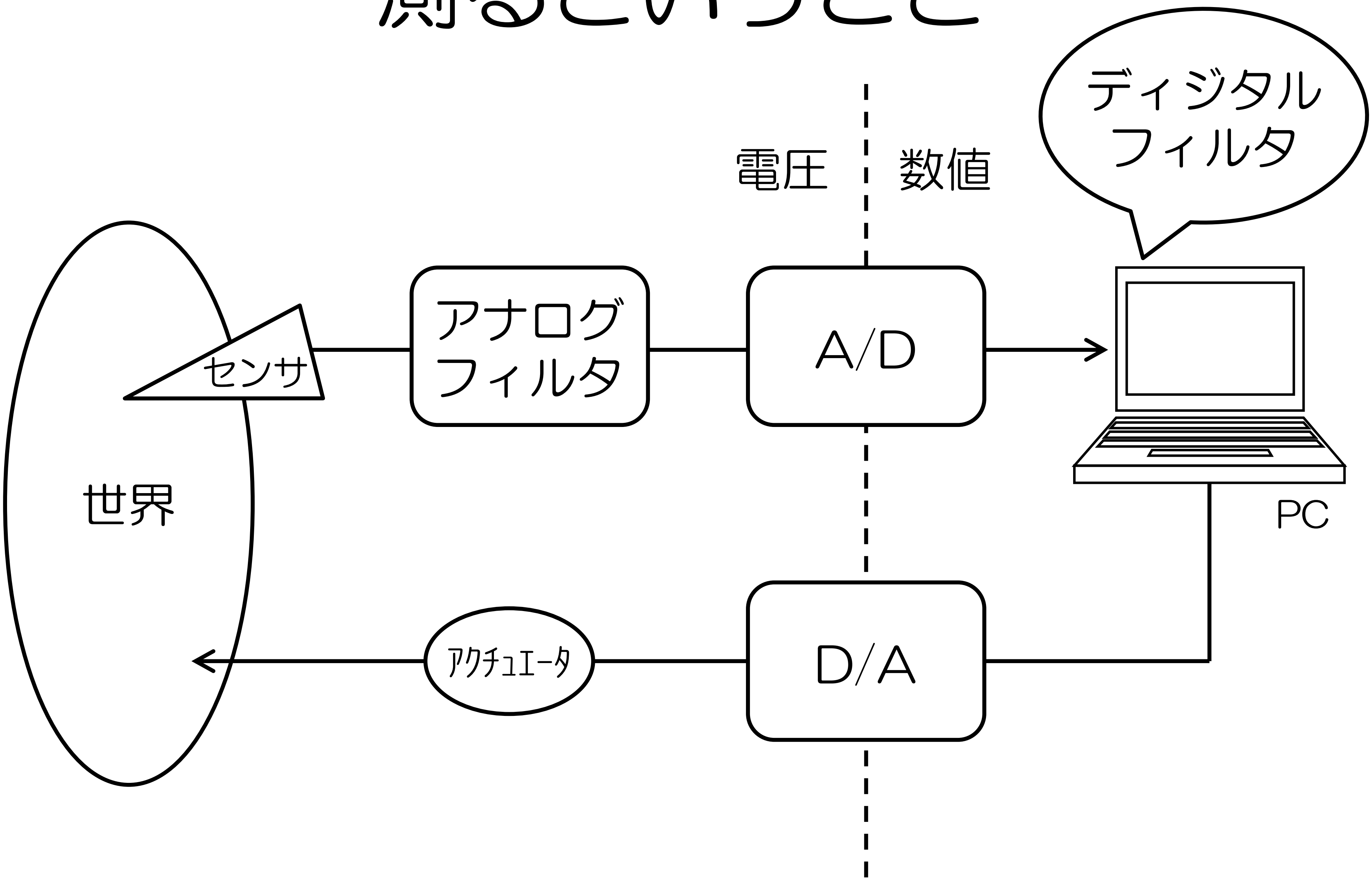
$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-j\frac{1}{2}\omega T} \cdot 2\cos\frac{1}{2}\omega T$$

ディジタルフィルタ（移動平均）



$$H(\omega) = \mathrm{e}^{-j\frac{1}{2}\omega T} \cdot 2\cos\frac{1}{2}\omega T$$

測るということ



もくじ

- 測るということ
- フーリエ変換のビジュアル的イメージ
- アナログフィルタの一番簡単な例
- A/D変換のビジュアル的イメージ
- ディジタルフィルタの一番簡単な例