

四元数を使ってみよう！

星 貴之

平成 20 年 6 月 3 日

1. はじめに

三次元空間中での剛体姿勢の記述には、よく目にする回転行列の他に四元数による方法がある。そして四元数のほうが“良い”表現とされているらしい。

本稿では文献 [1] を参考にして、四元数の良さとその使い方を紹介する。なお、座標系には右手系を採用する。

2. 回転行列による記述

ここでは回転行列表現とその問題点について述べる。

2.1 オイラー角

三次元空間中の任意の回転は、座標軸を回転軸とする回転を 3 つ組み合わせることで表現できる (広義のオイラー角)。オイラーが用いた回転軸の選び方は Z-X-Z であった (狭義のオイラー角)。これは独楽の歳差運動に対応する。また慣例によって他の回転軸の選び方も存在し、混乱の要因となりうる。航空機などで用いられるロール・ピッチ・ヨー角による表現 (カルダン角とも言う) は X-Y-Z である。筆者の趣味により、ここではロール・ピッチ・ヨー角で話を進める。

2.2 具体的な計算例

ロール角 α [rad], ピッチ角 β [rad], ヨー角 γ [rad] を Fig.1 のように定義する。ここで $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ は剛体の向きを表す単位ベクトル ($|p| = 1$) である。これは初期状態で x 軸方向を向いていた p がどのように姿勢変化 (回転) したかを表している。この回転は、回転行列 G として次のように書かれる。ここで s, c はそれぞれ \sin, \cos の省略形である。

$$G \equiv \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c\gamma c\beta & c\gamma s\beta s\alpha - s\gamma c\alpha & c\gamma s\beta c\alpha + s\gamma s\alpha \\ s\gamma c\beta & s\gamma s\beta s\alpha + c\gamma c\alpha & s\gamma s\beta c\alpha - c\gamma s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\beta c\alpha \end{bmatrix} \quad (1)$$

余談であるが、剛体に三軸加速度センサを取り付け、重力ベクトル $g = [0, 0, -g]^T$ (g [m/s²] は重力加速度) を計測することを考える。センサ座標 $\{a_x, a_y, a_z\}$ の各軸は初期状態でワールド座標 $\{x, y, z\}$ の各軸とそれぞれ一致していたものとする。回転後の加速度センサ出力 $a = [a_x, a_y, a_z]^T$ は次のように書かれる。

$$a = G^T g = -g \begin{bmatrix} -s\beta \\ c\beta s\alpha \\ c\beta c\alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

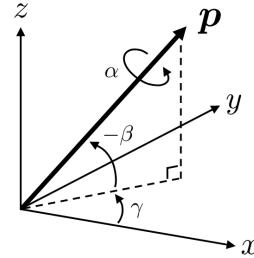


Fig.1 ロール角 α , ピッチ角 β , ヨー角 γ .

2.3 オイラー角の問題点

どの回転軸の選び方をしても、オイラー角には自由度が縮退してしまう特異姿勢が存在する。ソフトウェアでは例外処理を必要とし、制御においてはシステムの本質と関係ない特異点となるため、厄介な問題である。例えばロール・ピッチ・ヨー角の場合、 $\beta = -\pi/2$ rad のとき (p が z 軸方向を向いたとき) 回転行列 G は次のようになる。

$$G = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -s(\gamma + \alpha) & -c(\gamma + \alpha) \\ 0 & c(\gamma + \alpha) & -s(\gamma + \alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

これは次のような座標変換を表す。

$$[1, 0, 0]^T \rightarrow [0, 0, 1]^T \quad (4)$$

$$[0, 1, 0]^T \rightarrow [-s(\gamma + \alpha), c(\gamma + \alpha), 0]^T \quad (5)$$

$$[0, 0, 1]^T \rightarrow [-c(\gamma + \alpha), -s(\gamma + \alpha), 0]^T \quad (6)$$

式 (5), (6) を見てわかるように、回転後の姿勢が与えられたとき α と γ を分離して一意に決定することができない。 ($\beta = \pi/2$ rad のときも同様。) そのため例えば「 $\beta = \pm \pi/2$ rad のときは $\alpha = 0$ rad とする」などの例外処理が必要となる。

3. 四元数による記述

四元数表現は、上述した縮退の問題を生じないという利点がある。以下、その表現法について説明する。

3.1 四元数とは

四元数 q は 1 個の実数成分と 3 個の虚数成分から成る数であり、次のように書かれる。

$$q \equiv q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

$$\begin{aligned}
&= (q_0, q_1, q_2, q_3) \\
&= (q_0, \mathbf{q}) \tag{7}
\end{aligned}$$

ここで i, j, k はクォータニオン単位と呼ばれ、以下の性質を持つ。

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{8}$$

$$i = jk = -kj \tag{9}$$

$$j = ki = -ik \tag{10}$$

$$k = ij = -ji \tag{11}$$

共役四元数 $q^* \equiv (q_0, -\mathbf{q})$, ノルム $|q| \equiv \sqrt{q_0^2 + |\mathbf{q}|^2}$ が定義され、逆元 $q^{-1} = q^*/|q|^2$ が与えられる。

$u = (u_0, \mathbf{u})$, $v = (v_0, \mathbf{v})$ についての足し算, 引き算は各成分ごとに行えばよい。掛け算はやや面倒であるが次のように計算される。

$$\begin{aligned}
uv &= (u_0v_0 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, u_0\mathbf{v} + v_0\mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}) \tag{12} \\
&= (u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3, \\
&\quad u_0v_1 + u_1v_0 + u_2v_3 - u_3v_2, \\
&\quad u_0v_2 + u_2v_0 + u_3v_1 - u_1v_3, \\
&\quad u_0v_3 + u_3v_0 + u_1v_2 - u_2v_1)
\end{aligned}$$

ここで \cdot と \times はそれぞれベクトルの内積, 外積を表す。この四元数の掛け算は非可換である点に注意。

3.2 回転とベクトルの四元数表現

三次元回転は回転軸 r (単位ベクトル) とその軸回りの回転角 ϕ [rad] によって表される。4 自由度に見えるが, $|r| = 1$ という拘束があるので全部で 3 自由度である。その回転を表す四元数 r は次のように書かれる。

$$r = \left(\cos \frac{\phi}{2}, r \sin \frac{\phi}{2} \right) \tag{13}$$

三次元ベクトルは四元数の虚数成分によって表す。実数成分は何でもよいので、簡単のためゼロとする。ベクトル w を表す四元数 w は次のように書かれる。

$$w = (0, \mathbf{w}) = (0, w_x, w_y, w_z) \tag{14}$$

四元数による回転は以下のように計算される。ここで w' は回転後の w である。

$$\begin{aligned}
w' &= rwr^* \tag{15} \\
&= \left(c \frac{\phi}{2}, r s \frac{\phi}{2} \right) (0, \mathbf{w}) \left(c \frac{\phi}{2}, -r s \frac{\phi}{2} \right)
\end{aligned}$$

3.3 具体的な計算例

例題として, Fig.1 の回転の四元数表現 G を求める。まず x, y, z 軸回りの回転をそれぞれ四元数で表し, それらを順にかけるとする。(回転軸 p , 回転角 α とするのは勘違い。そのような覚えやすい関係ではない。)

$$\begin{aligned}
G &= \left(c \frac{\gamma}{2}, 0, 0, s \frac{\gamma}{2} \right) \left(c \frac{\beta}{2}, 0, s \frac{\beta}{2}, 0 \right) \left(c \frac{\alpha}{2}, s \frac{\alpha}{2}, 0, 0 \right) \\
&= \left(c \frac{\gamma}{2} c \frac{\beta}{2} c \frac{\alpha}{2} + s \frac{\gamma}{2} s \frac{\beta}{2} s \frac{\alpha}{2}, c \frac{\gamma}{2} c \frac{\beta}{2} s \frac{\alpha}{2} - s \frac{\gamma}{2} s \frac{\beta}{2} c \frac{\alpha}{2}, \right. \\
&\quad \left. c \frac{\gamma}{2} s \frac{\beta}{2} c \frac{\alpha}{2} + s \frac{\gamma}{2} c \frac{\beta}{2} s \frac{\alpha}{2}, s \frac{\gamma}{2} c \frac{\beta}{2} c \frac{\alpha}{2} - c \frac{\gamma}{2} s \frac{\beta}{2} s \frac{\alpha}{2} \right) \tag{16}
\end{aligned}$$

確認のためベクトル p を表す四元数 p を計算すると,

$$\begin{aligned}
p &= G(0, 1, 0, 0)G^* \\
&= (\text{中略}) \\
&= (0, c\gamma c\beta, s\gamma c\beta, -s\beta) \tag{17}
\end{aligned}$$

となり, 正しく p が導かれることがわかる。途中で項が 60 個出てくる大変な計算だが, それらがまとまって収束していく過程は爽快である。

また, x 軸方向単位ベクトル e_x が p に移る回転の一例 (β, γ のみ再現) は次のように求められる (Fig.2)。

$$r = \frac{e_x \times p}{|e_x \times p|} = \frac{1}{\sqrt{p_y^2 + p_z^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -p_z \\ p_y \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\cos \phi = \frac{e_x \cdot p}{|e_x||p|} = p_x \tag{19}$$

上式は $r \perp e_x, r \perp p$ を仮定して導かれる。ロール角 α まで再現するためには, この仮定を変える必要がある。

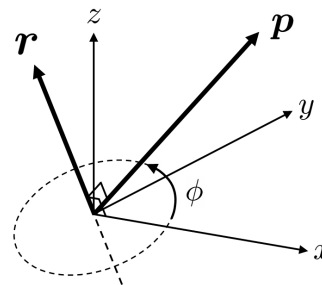


Fig.2 回転軸 r , 回転角 ϕ .

4. おわりに

本稿では四元数による三次元回転表現を紹介した。回転軸とその軸回りの回転角による表現法であり, 縮退を生じる特異姿勢が存在しない。回転行列による表現法と比較して少ない要素数で回転を表現できるため, 計算効率がよく, 3DCG の分野で重宝されている。オイラー角との使い分けは用途や好みにもよるであろう。

四元数の数学的な側面を深く知りたい方には文献 [2] をお勧めしておく。実数から行列, 複素数を経て四元数へ至るストーリーが展開されている。

参考文献

- [1] 中田亨: 四元数で回転 入門, <http://staff.aist.go.jp/toru-nakata/quaternion.html>
- [2] 金谷一朗: ベクトル・複素数・クォータニオン, <http://www-sens.sys.es.osaka-u.ac.jp/users/kanaya/Documents/VCQ/kanaya-handai-quaternion.pdf>

A 半角の公式

四元数の回転計算で頻出するので, 覚えておくと便利。

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sin \theta \tag{20}$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta \tag{21}$$

$$2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta \tag{22}$$